

Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2009

Problema 1 Resuelve los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - x})$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{2x^2 + x} \right)^{x^3 + 2}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 1} \right)^{2x - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{2x^3 + 2x^2 - 7x + 3}$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^x - 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x \sin x}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - x}) = -\frac{3}{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{2x^2 + x} \right)^{x^3 + 2} = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 1} \right)^{2x - 1} = e^8$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{2x^3 + 2x^2 - 7x + 3} = \frac{2}{3}$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3} = \frac{3}{4}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^x - 1} = 0$

7. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x \sin x} = \frac{1}{2\pi}$

Problema 2 Resuelve las siguientes derivadas:

1. $f(x) = (4x^2 - 1)^{10}$

2. $f(x) = e^{\sin x}$

3. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

Solución:

1. $f'(x) = 10(4x^2 - 1)(8x)$

2. $f(x) = \cos x e^{\sin x}$

3. $f(x) = (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$

Problema 3 Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4x + 3} dx$

2. $\int x \ln x dx$

3. $\int \frac{4x}{1 + x^4} dx$

Solución:

1. $\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{29}{2} \ln|x - 3| - \frac{3}{2} \ln|x - 1| + C$

2. $\int x \ln x dx = \frac{x^2(2 \ln|x| - 1)}{4} + C$

3. $\int \frac{4x}{1 + x^4} dx = 2 \arctan x^2 + C$

Problema 4 Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = x^2 + 3x - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 2$$

Solución:

Calculamos los puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \implies x^2 + 3x - 1 = x + 2 \implies x = -3, \quad x = 1$$

$$\int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right]_{-3}^1 = -\frac{32}{3}$$

$$S = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} u^2$$