Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2009

Problema 1 Sean la función real de variable real

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-2}$$

Se pide estudiar:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las posibles rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta $y = -3x + 1$
10. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$.
11. Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{2\}$
2. Puntos de corte:

   Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = -9/2 \Longrightarrow (0, -9/2)$

   Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow (3, 0)$

3. Signo de la función: $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-2} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. Simetría:
$$\begin{cases} f(-x) = \dfrac{(-x-3)^2}{-x-2} = -\dfrac{(x+3)^2}{x+2} \\ \\ f(-x) \neq f(x) \text{ y } f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$$
La función no es ni par ni impar

5. Asíntotas:

   - Verticales: $x = 2$
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

   - Horizontales: No hay
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x-2} = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx + n$
$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2 - 2x} = 1$$
$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-3)^2}{x-2} - x\right) = -4$$
$$y = x - 4$$

6. Monotonía y extremos relativos:
$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(0, 2) \cup (2, 3)$

La función presenta un Máximo en el punto $(1, -4)$ y un Mínimo en el $(3, 0)$.

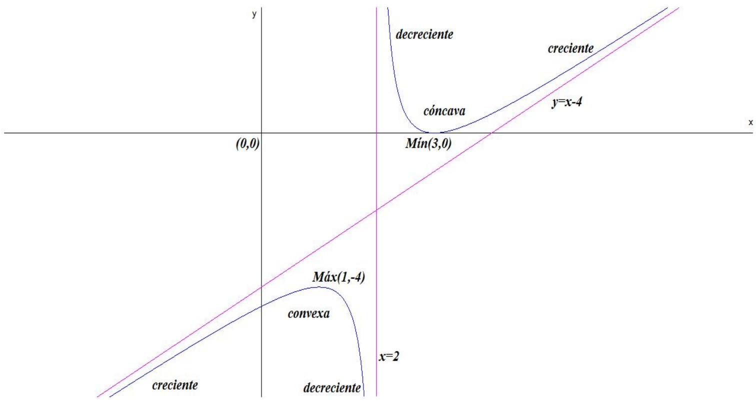
7. Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$$

Como $f''(x)$ es distinta de cero para cualquier valor de x no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

8. Representación gráfica:



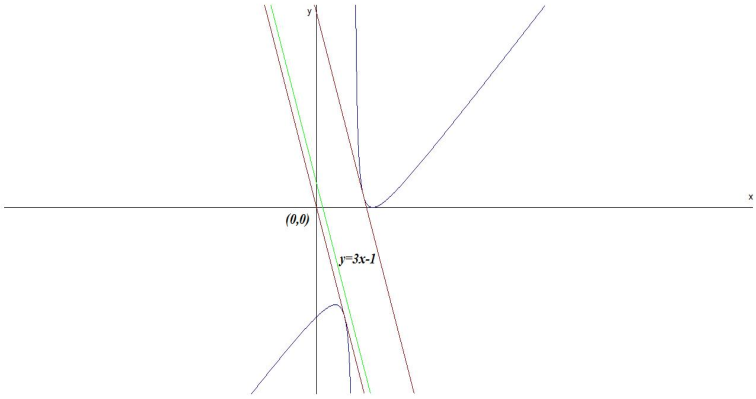
9.
$$m = f'(a) \Longrightarrow -3 = \frac{(a-1)(a-3)}{(a-2)^2} \Longrightarrow a = \frac{3}{2}, \ \ a = \frac{5}{2}$$

Si $a = \dfrac{3}{2}$ tenemos:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2} \Longrightarrow y + \frac{9}{2} = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Si $a = \dfrac{5}{2}$ tenemos:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \Longrightarrow y - \frac{1}{2} = -3\left(x - \frac{5}{2}\right)$$



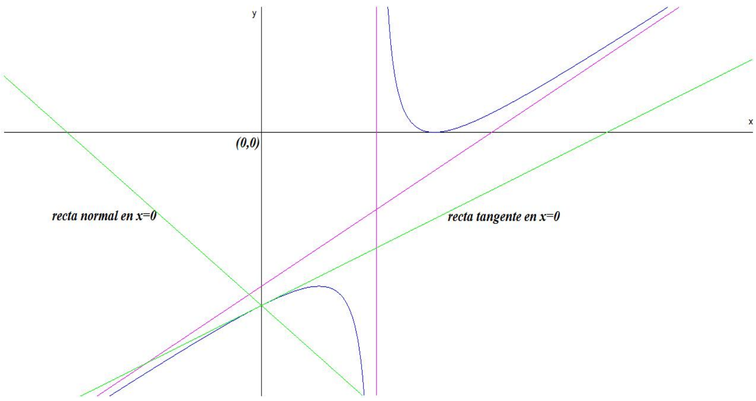
10. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$:

    Como $f(0) = -9/2$ las rectas pasan por el punto $(0, -9/2)$.

    Como $m = f'(0) = 3/4$ tenemos que

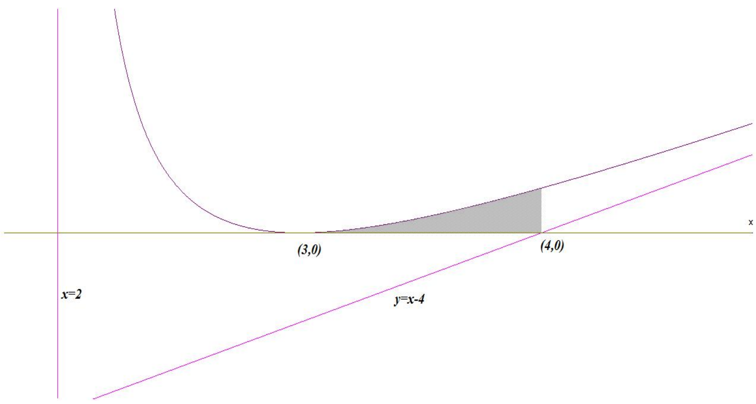
$$\text{Recta Tangente}: \ y + \frac{9}{2} = \frac{3}{4}x$$

$$\text{Recta Normal}: \ y + \frac{9}{2} = -\frac{4}{3}x$$



11. Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 3$ y $x = 4$:

$$S = \int_3^4 \frac{(x-3)^2}{x-2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4x + \ln|x-2|\right]_3^4 = -\frac{1}{2} + \ln 2 \ u^2$$


x
(3,0)
(4,0)
x=2
y=x-4