Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Noviembre 2008

Problema 1 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 - 3})$

2. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1} + 3}{x - 1}$

3. $\lim_{x \longrightarrow 1} \dfrac{6x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}$

4. $\lim_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^3 - 2x - 4}{2x^2 - 3x - 2}$

5. $\lim_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 1}}{x - 2}$

6. $\lim_{x \longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{x + 1}}{x - 3}$

Solución:

1. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 - 3}) = -\dfrac{1}{2}$

2. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1} + 3}{x - 1} = 0$

3. $\lim_{x \longrightarrow 1} \dfrac{6x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1} = \dfrac{8}{5}$

4. $\lim_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^3 - 2x - 4}{2x^2 - 3x - 2} = 2$

5. $\lim_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 1}}{x - 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

6. $\lim_{x \longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{x + 1}}{x - 3} = \dfrac{5}{4}$

Problema 2 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (x^2 + 1)^8$

2. $y = \sin(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2)$

3. $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 1}$

4. $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)$

5. $y = e^{x^2+x-1}$

6. $y = \tan(x^2+x-8)$

Solución:

1. $y = (x^2+1)^8 \Longrightarrow y' = 16x(x^2+1)^7$

2. $y = \sin(x^2-1)\cdot(x^2+2) \Longrightarrow$
$$y' = 2x\cos(x^2-1)\cdot(x^2+2) + \sin(x^2-1)\cdot(2x)$$

3. $y = \dfrac{e^x}{x^2-1} \Longrightarrow y' = \dfrac{e^x(x^2-1) - 2xe^x}{(x^2-1)^2}$

4. $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x+2}$

5. $y = e^{x^2+x-1} \Longrightarrow y' = (2x+1)e^{x^2+x-1}$

6. $y = \tan(x^2+x-8) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x+1}{\cos^2(x^2+x-8)}$

Problema 3 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ en $x = 2$

2. $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ en $x = 0$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ en $x = 2$

4. $f(x) = (x^2-1)^4$ en $x = 2$

Solución:

1. $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^2} \Longrightarrow f'(2) = -4$ y $f(2) = 5$

   Recta Tangente: $y - 5 = -4(x-2)$

   Recta Normal: $y - 5 = \dfrac{1}{4}(x-2)$

2. $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \Longrightarrow f'(0) = \dfrac{5}{4}$ y $f(0) = \dfrac{1}{2}$

   Recta Tangente: $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}x$

   Recta Normal: $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{4}{5}x$

3. $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} \Longrightarrow f'(2) = \dfrac{4}{9}$ y $f(2) = \dfrac{4}{3}$

   Recta Tangente: $y - \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{9}(x-2)$

   Recta Normal: $y - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{9}{4}(x-2)$

4. $f'(x) = 8x(x^2-1)^3 \Longrightarrow f'(2) = 432$ y $f(2) = 81$

   Recta Tangente: $y - 81 = 432(x-2)$

   Recta Normal: $y - 81 = -\dfrac{1}{432}(x-2)$