# Examen de Matemáticas 1$^o$ de Bachillerato

**Abril 2008**

**Problema 1** Sean $A(-1,0)$, $B(2,-3)$ y $C(4,6)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice $D$.
2. La longitud de sus lados.
3. Los ángulos que forman.
4. Su centro.
5. Encontrar un vector de módulo 7 que sea perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

**Solución:**

1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1,0) + (2,9) = (1,9)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(3,-3)| = \sqrt{18}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2,9)| = \sqrt{85}$
3. $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{-21}{\sqrt{18}\sqrt{85}} \Longrightarrow \alpha = 122^o28'17''$ y $\beta = 57^o31'43''$
4. $M\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$
5. Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (3,-3)$ puede ser el vector $\overrightarrow{w} = (3,3)$ y tendremos:

   $$\overrightarrow{u} = \frac{7}{|\overrightarrow{w}|}\cdot\overrightarrow{w} = \left(\frac{21}{\sqrt{18}}, \frac{21}{\sqrt{18}}\right).$$

**Problema 2** Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(2,2)$, $B(1,0)$ y $C(0,3)$

**Solución:**

Dada la ecuación general de una circunferencia: $x^2 + y^2 + mx - ny + p = 0$, imponemos que pase por los puntos dados y nos queda

$$\left\{\begin{array}{c} 2m + 2n + p + 8 = 0 \\ m + p + 1 = 0 \\ 3n + p + 9 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} m = -1 \\ n = -3 \\ p = 0 \end{array}\right.$$

La circunferencia buscada es: $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$

**Problema 3** Se pide:

1. Calcular la distancia del punto $A(-1,-4)$ a la recta $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1}$
2. Calcular el ángulo que forman las rectas

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{array} \right. \quad \text{y} \quad s: x - 2y + 1 = 0$$

**Solución:**

1. $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} \Longrightarrow x - 2y + 5 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-1+8+5|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

2. Tenemos $r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow x - y - 2 = 0$ y $s: x - 2y + 1 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \alpha = 18^{\text{o}}26'1''$$

**Problema 4** Dada la recta $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2}$ encontrar los puntos de ella que distan 5 unidades del origen de coordenadas.

**Solución:**

La ecuación de una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 5 es $x^2+y^2-25=0$. Además $r: \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array} \right.$, sustituyendo estos valores en la circunferencia tenemos $2\lambda^2 + 2\lambda - 20 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$ y $\lambda = -2$. Sustituyendo estos valores en la recta obtenemos los puntos:

$$(4,3) \text{ y } (0,-5)$$