Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2008

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}$, calcule:

1. Corte con los ejes.
2. Dominio de definición.
3. Signo de la función.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Curvatura y puntos de Inflexión.
9. Representación aproximada.
10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 3$

Solución:

1.
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$$

   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \mp 1 \Longrightarrow (-1, 0),\ \ (1, 0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 1/2)$.

2. $Dom(f) = R - \{2\}$
3.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2 + \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ No hay simetrías.
5. Asíntotas:

- **Verticales:**

  $x = 2$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{x^2-1}{x-2} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{x^2-1}{x-2} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- **Horizontales:** No Hay
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x-2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$
$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x^2-2x} = 1$$
$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2-1}{x-2} - x\right) = 2$$
$$y = x + 2$$

6.
$$f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x^2-4x+1 = 0 \Longrightarrow x = 2+\sqrt{3} = 3,732, \quad x = 2-\sqrt{3} = 0,268$$

	$(-\infty, 2-\sqrt{3})$	$(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$	$(2+\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Crece	Decrece	Crece

Crece: $(-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$

Decrece: $(2-\sqrt{3}, 2) \cup (2, 2+\sqrt{3})$

7. La función tiene un máximo en el punto $(0,268; 0,536)$ donde pasa de crecer a decrecer y un mínimo en el punto $(3,732; 7,464)$ donde pasa de decrecer a crecer.

8.
$$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de inflexión}$$

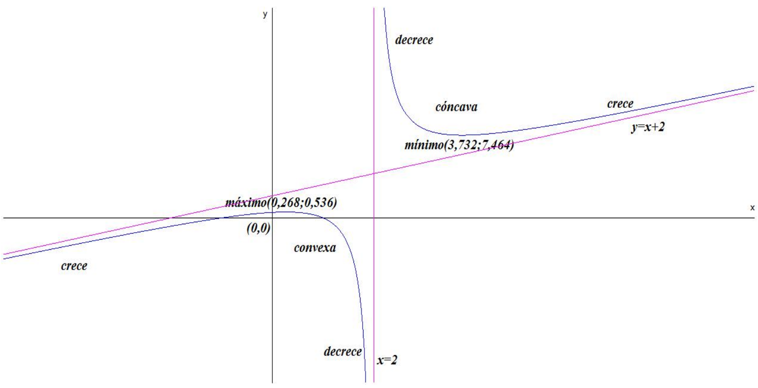
Como el numerador es siempre positivo, tendremos que estudiar el signo del denominador.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, 2)$

Cóncava: $(2, \infty)$

9. Representación



10.

$$x = 3 \Longrightarrow f(3) = 8, \;\; m = f'(3) = -2$$

$$y - 8 = -2(x - 3) \;\text{ tangente}, \;\; y - 8 = \frac{1}{2}(x - 3) \;\text{ normal}$$