Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2008

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ (3x-1)^2 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 3x+1 & \text{si} \quad 1<x\le 2 \\ 2x^3-1 & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$$

en los puntos $x=0$, $x=1$ y $x=2$.

Solución:

En $x=0$ es discontinua evitable(agujero), en $x=1$ hay continuidad, y en $x=2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3kx^3-kx+1 & \text{si} \quad x<2 \\ (k+1)x^2-2x+k & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

sea continua.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}((k+1)x^2-2x+k) = 5k \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(3kx^3-kx+1) = 22k+1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$5k = 22k+1 \Longrightarrow k = -1/17$$

Problema 3 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3-2x^2+x-1 & \text{si} \quad x<1 \\ 5x^2-6x+2 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en el punto de abcisa $x=1$.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}(5x^2-6x+2) = 1 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}(3x^3-2x^2+x-1) = 1 \\ \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x=1$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 10x-6 & \text{si} & x<1 \\ 9x^2-4x+1 & \text{si} & x\geq 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1^-)=4 \\ f'(1^+)=6 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x=1$$

Problema 4 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2ax^3-bx^2+5a & \text{si} & x<1 \\ 4bx^2-ax+b+2 & \text{si} & x\geq 1 \end{array} \right.$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(2ax^3-bx^2+5a) = 7a-b \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(4bx^2-ax+b+2) = -a+5b+2 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$7a-b=-a+5b+2 \Longrightarrow 4a-3b-1=0$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 6ax^2-2bx & \text{si} & x<1 \\ 8bx-a & \text{si} & x\geq 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1^-)=6a-2b \\ f'(1^+)=8b-a \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$6a-2b=8b-a \Longrightarrow 7a-10b=0$$

Luego:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a-3b-1=0 \\ 7a-10b=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=10/19 \\ b=7/19 \end{array} \right.$$