Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2006

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 2$

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow$ No tiene soluciós, luego no hay puntos de corte con el eje de abcisas.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -3)$.
- $Dom(f) = R - \{-1, 1\}$

2. $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ Es PAR.

3. Asíntotas:

   - **Verticales:**

     $x = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^2+3}{x^2-1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^2+3}{x^2-1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

$x = 1$:
$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

]

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2-1} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay al haber horizontales

4.
$$f'(x) = -\frac{8x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece	decrece

Crece: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

Decrece: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

5. La función tiene un máximo en el punto $(0, -3)$ donde pasa de crecer a decrecer.

6.
$$f''(x) = \frac{8(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0$$

Luego no hay puntos de inflexión.

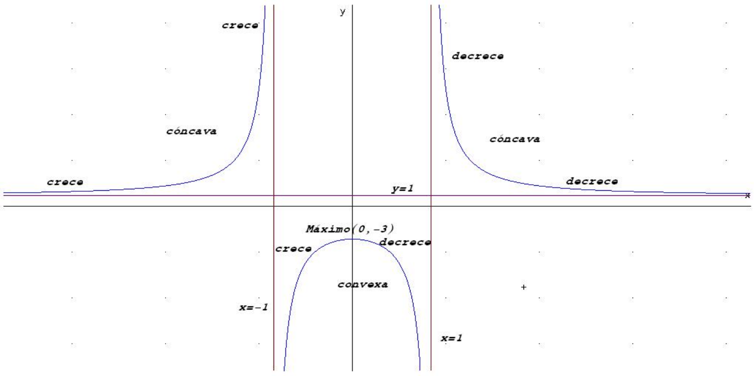
Como el numerador es siempre positivo, tendremos que estudiar el signo del denominador.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Convexa: $(-1, 1)$

Cóncava: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

7. Representación



8.

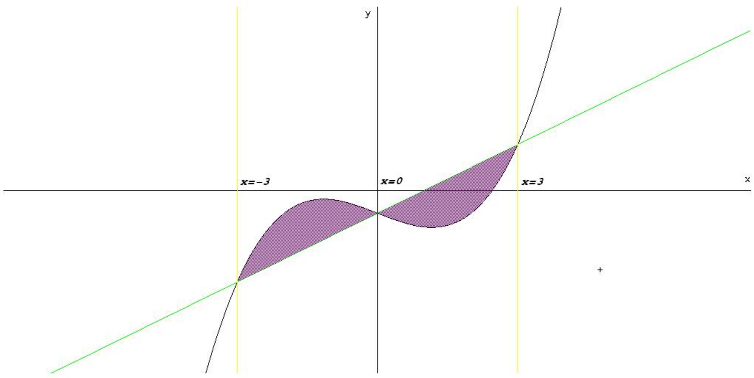
$$x = 2 \Longrightarrow f(2) = \frac{7}{3}, \;\; m = f'(2) = -\frac{16}{9}$$

$$y - \frac{7}{3} = -\frac{16}{9}(x-2) \;\text{ tangente}, \;\; y - \frac{7}{3} = \frac{9}{16}(x-2) \;\text{ normal}$$

Problema 2 Calcular el área encerrada por las curvas:

$$f(x) = x^3 - 4x - 5, \qquad \text{y} \quad g(x) = 5x - 5$$

Solución:



$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \;\; x^3 - 4x - 5 = 5x - 5 \Longrightarrow x = -3, \;\; x = 0, \;\; x = 3$$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^3 - 9x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}$$

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ \\ F(3) = \dfrac{81}{4} - \dfrac{81}{2} = -\dfrac{81}{4} \\ \\ F(-3) = \dfrac{81}{4} - \dfrac{81}{2} = \dfrac{81}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} S_1 = F(0) - F(-3) = \dfrac{81}{4} \\ \\ S_2 = F(3) - F(0) = -\dfrac{81}{4} \end{cases}$$

$$\text{Área} = |S_1| + |S_2| = \frac{81}{2}\ u^2$$