Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2006

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Área encerrada entre la función, el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.
9. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^3+3}{x^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^3+3 = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt[3]{3}$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
- $Dom(f) = R - \{0\}$

2. $f(-x) \neq f(x) \Longrightarrow$ No es PAR.

   $f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ No es IMPAR.

3. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^3+3}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^3+3}{x^2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^3+3}{x^2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3-1}{x^2}=\infty$$

- **Oblicuas:** $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+3}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+3}{x^2}-x\right)=0$$

$$y=x$$

4.

$$f'(x)=\frac{x^3-6}{x^3}=0\Longrightarrow x=\sqrt[3]{6}$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\sqrt[3]{6})$	$(\sqrt[3]{6},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

Crece: $(-\infty,0)\cup(\sqrt[3]{6},\infty)$

Decrece: $(0,\sqrt[3]{6})$

5. La función tiene un mínimo en el punto $(1.817120592, 2.725680889)$ donde pasa de decrecer a crecer, en el punto donde $x=0$ la función pasa de crecer a decrecer, pero no es ni máximo ni mínimo, ya que la recta $x=0$ es una asíntota.

6.

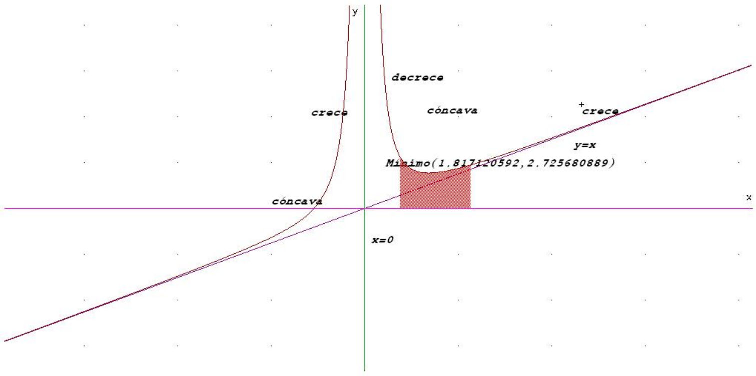
$$f''(x)=\frac{18}{x^4}\neq 0$$

Luego no hay puntos de inflexión.

Como el numerador es siempre positivo, y el denominador es siempre positivo, la segunda derivada es siempre positiva. En conclusión, la función es cóncava en todo su dominio.

Convexa: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

7. Representación



8.

$$F(x) = \int_1^3 \frac{x^3+3}{x^2}\,dx = \int \left(x + \frac{3}{x^2}\right)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{x}\bigg]_1^3 = 6\,u^2$$

9.

$$x = 1 \Longrightarrow f(1) = 4,\;\; m = f'(1) = -5$$

$$y - 4 = -5(x-1)\;\text{ tangente},\;\; y - 4 = \frac{1}{5}(x-1)\;\text{ normal}$$