

Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Marzo 2005 (Recuperaciones)

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ y $C(1, 0)$.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$
$$\begin{cases} 2+ & m+ & n+ & p = 0 \\ 8+ & & 3n+ & p = 0 \\ 1+ & m+ & & p = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} m = 5 \\ n = -1 \\ p = -6 \end{cases}$$
$$x^2 + y^2 + 5x - y - 6 = 0$$

Problema 2 Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$, que equidistan de otro $F(3, 0)$ y de la recta $d : 2x + 5 = 0$.

Solución:

$$d(P, F) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}, \quad d(P, d) = \frac{2x+5}{2}$$
$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \frac{2x+5}{2} \implies 4y^2 = 44x - 11$$

Problema 3 Calcular la ecuación de una elipse centrada en el origen de focos $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$, con una excentricidad de $0,25$.

Solución:

$$c = 4, \quad e = 0,25, \quad e = \frac{c}{a} \implies a = \frac{c}{e} = \frac{4}{0,25} = 16$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \implies b^2 = 256 - 16 = 240$$
$$\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{240} = 1 \implies 240x^2 + 256y^2 = 61440$$

Problema 4 Calcular:

1. Derivar

(a) $y = \arctan(x^2 - 1)$
(b) $y = \sqrt{x^5 - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2}$

3. la recta tangente y normal a la función $f(x) = \frac{x-1}{x}$

Solución:

1. (a) $y' = \frac{5x^4}{1 + (x^5 + 1)^2}$

(b) $y' = \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5 + 1}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2} = 1$

3.

$$a = 1, \quad b = f(1) = 0, \quad y - b = m(x - a)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \implies m = f'(1) = 1$$

La recta tangente es $y = x$.

La recta normal es $y = -x$.

Problema 5 Calcular las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Solución:

- **Verticales:** $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Luego no hay

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = -1$$

$$y = x - 1$$

