

Examen de Estadística

Problema 1 En una encuesta de opinión se sabe que una de cada 20 personas compran el detergente A para su uso doméstico. Si hay 20000 posibles compradores, calcular:

1. Probabilidad de que lo compren más de 1300 respuestas satisfactorias.
2. Probabilidad de que lo compren entre 900 y 1300.
3. Si el número de compradores posibles fuese 25000, calcular las dos probabilidades anteriores.
4. En ambos casos, calcular el número de personas que, presumiblemente, comprarán el producto.

Solución

1.

$$p = \frac{1}{20} = 0,05, \quad q = 1 - p = 0,95, \quad n = 20000$$

$$\mu = np = 20000 \cdot 0,05 = 1000, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 30,82 \implies$$

$$N(1000; 30,82)$$

$$P(X > 1300) = P\left(Z > \frac{1300,5 - 1000}{30,82}\right) = 1 - P(Z < 9,75) = 0$$

2.

$$P(900 < X < 1300) = P\left(\frac{900,5 - 1000}{30,82} < Z < \frac{1299,5 - 1000}{30,82}\right) =$$

$$P(-3,23 < Z < 9,71) = P(Z < 9,71) - P(Z < -3,23) = 1$$

3.

$$p = \frac{1}{20} = 0,05, \quad q = 1 - p = 0,95, \quad n = 25000$$

$$\mu = np = 25000 \cdot 0,05 = 1250, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 34,46 \implies$$

$$N(1250; 34,46)$$

$$P(X > 1300) = P\left(Z > \frac{1300,5 - 1250}{34,46}\right) = P(Z > 1,47) =$$

$$= 1 - P(Z < 1,47) = 0,0708$$

4.

$$\begin{aligned} P(900 < X < 1300) &= P\left(\frac{900,5 - 1250}{34,46}Z < \frac{1299,5 - 1250}{34,46}\right) = \\ P(-10,14 < Z < 1,43) &= P(Z < 1,43) - P(Z < -10,14) = \\ &= 1 - 0,9236 - (1 - 1) = 0,9236 \end{aligned}$$

5. Si $n = 10000$ entonces $E[X] = np = 1000$.

Si $n = 15000$ entonces $E[X] = np = 1250$.

Problema 2 La cantidad de abutardas que pasan por el estrecho de Gibraltar cada 15 minutos, en épocas de emigración sigue una normal de media 50 y desviación típica de 7, se pide:

1. Calcular la probabilidad de que pasen más de 60 abutardas en quince minutos.
2. Probabilidad de que pasen entre 30 y 65 abutardas en quince minutos.
3. Si están pasando durante 15 horas, calcular el número de abutardas, que presumiblemente habrán pasado ese día.

Solución:

1.

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= P\left(Z > \frac{60 - 50}{7}\right) = P(Z > 1,43) = \\ &= 1 - P(Z < 1,43) = 0,0764 \end{aligned}$$

2.

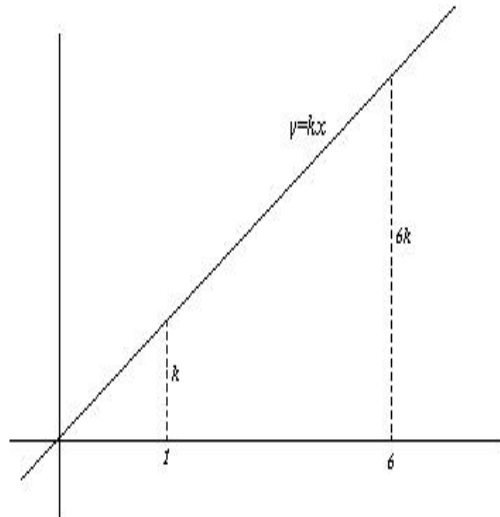
$$\begin{aligned} P(30 < X < 65) &= P(-2,86 < Z < 2,14) = \\ P(Z < 2,14) - P(Z < -2,86) &= 0,9838 - (1 - 0,9979) = 0,9817 \end{aligned}$$

3. Pasarán $15 \cdot 200 = 3000$ abutardas.

Problema 3 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [1, 6] \\ 0 & \text{si } x \notin [1, 6] \end{cases}$$

1. Calcular k de manera que $f(x)$ sea una función de densidad.
2. Calcular $P(X > 2)$.
3. Calcular $P(-3 < X < 3)$.



4. Calcular $P(2 < X < 5)$.

5. Calcular la función de distribución asociada a esta función.

Solución:

$$1. S_5 - S_1 = 1 \implies \frac{36k}{2} - \frac{k}{2} = 1 \implies k = \frac{2}{35}$$

$$2. P(X > 2) = P(2 < X < 6) = \frac{72/35}{2} - \frac{4/35}{2} = 0,9714$$

$$3. P(-3 < X < 3) = P(1 < X < 3) = \frac{18/35}{2} - \frac{2/35}{2} = 0,2286$$

$$4. P(2 < X < 5) = \frac{50/35}{2} - \frac{8/35}{2} = 0,6$$

$$5. P(1 < X < x) = \frac{2x^2}{70} - \frac{2}{70} = \frac{x^2 - 1}{35}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{35} & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$