Examen de Estadística

Problema 1 Antonio ha comprobado que una de cada veinte mujeres a las que pide relaciones le ofrece una respuesta satisfactoria, el resto le dan calabazas. Decide declararse a todas de manera indiscriminada durante un mes, o más, hasta declararse a 1000 mujeres. Con estos datos se pregunta:

1. Probabilidad de que Antonio haya recibido más de 70 respuestas satisfactorias.
2. Probabilidad de que reciba entre 30 y 70.
3. Si sólo se declara a 600, calcular las dos probabilidades anteriores.
4. En ambos casos, calcular el número de respuestas afirmativas que, presumiblemente, espera.

Solución

1.

$$p = \frac{1}{20} = 0,05, \quad q = 1 - p = 0,95, \quad n = 1000$$

$$\mu = np = 1000 \cdot 0,05 = 50, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{99} = 6,89 \Longrightarrow$$

$$N(50; 6,89)$$

$$P(X > 70) = P\left(Z > \frac{70,5 - 100}{6,89}\right) = 1 - P(Z < 2,97) = 0,0015$$

2.

$$P(30 < X < 70) = P\left(\frac{30,5 - 100}{6,89} < Z < \frac{69,5 - 50}{6,89}\right) =$$

$$P\left(-2,83 < Z < 2,83\right) = P(Z < 2,83) - P(Z < -2,83) =$$

$$= 0,9917 - (1 - 0,9917) = 0,9834$$

3.

$$p = \frac{1}{20} = 0,05, \quad q = 1 - p = 0,95, \quad n = 600$$

$$\mu = np = 30, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 5,34 \Longrightarrow N(30; 5,34)$$

$$P(X > 70) = P\left(Z > \frac{70,5 - 30}{5,34}\right) = P(Z > 7,58) = 1 - 1 = 0$$

4.

$$P(30 < X < 70) = P\left(\frac{30,5-30}{5,34} < Z < \frac{69,5-30}{5,34}\right) =$$

$$P\left(0,09 < Z < 7,39\right) = P(Z < 7,39) - P(Z < 0,09) =$$

$$= 1 - 0,5359 = 0,4641$$

5. Si $n = 1000$ entonces $E[X] = np = 50$.

   Si $n = 600$ entonces $E[X] = np = 30$.

Problema 2 En un consultorio médico, la cantidad de pacientes que llegan al mostrador de la recepcionista, cada 15 minutos, sigue una normal de media 6 y desviación típica de 2, se pide:

1. Calcular la probabilidad de que atienda a más de 7 pacientes en quince minutos.
2. Probabilidad de que atienda entre 5 y 7 pacientes en quince minutos.
3. Si esta trabajadora a trabajado una jornada de ocho horas, calcular el número de pacientes, que presumiblemente habrá atendido ese día.

Solución:

1.

$$P(X > 7) = P\left(Z > \frac{7-6}{2}\right) = P(Z > 0,5) = 1 - P(Z < 0,5) = 0,4801$$

2.

$$P(5 < X < 7) = P(-0,5 < Z < 0,5) = 2P(Z < 0,5) - 1 = 0,0398$$

3.

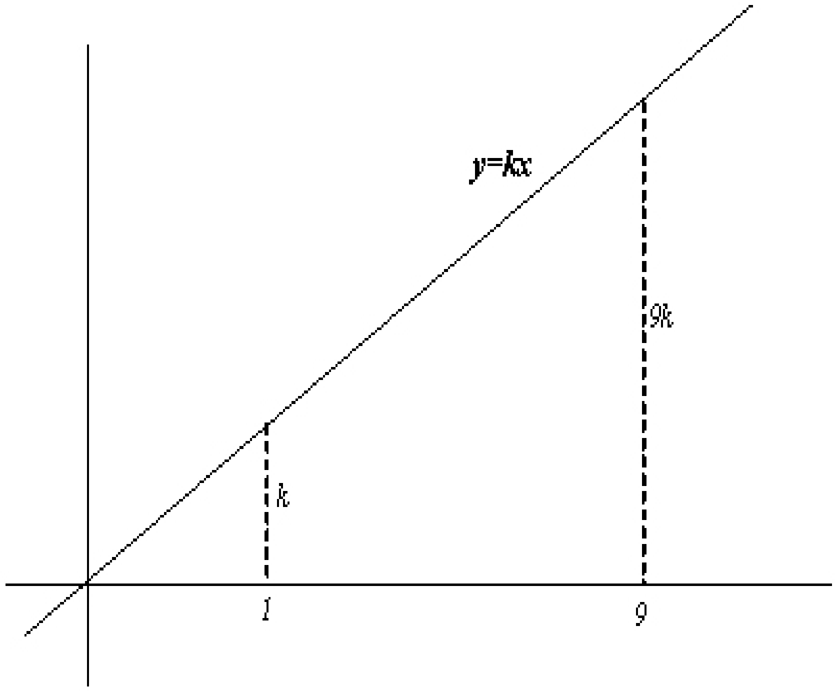
$$6 \cdot 4 \cdot 8 = 192$$

   Habrá atendido a 192 personas.

Problema 3 Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} kx & \text{si} & x \in [1,9] \\ 0 & \text{si} & x \notin [1,9] \end{array} \right.$$

1. Calcular k de manera que $f(x)$ sea una función de densidad.
2. Calcular $P(X > 4)$.



3. Calcular $P(-2 < X < 3)$.
4. Calcular $P(2 < X < 5)$.
5. Calcular la función de distribución asociada a esta función.

1. $S_9 - S_1 = 1 \Longrightarrow \dfrac{81k}{2} - \dfrac{k}{2} = 1 \Longrightarrow k = \dfrac{1}{40}$
2. $P(X > 4) = P(4 < X < 9) = \dfrac{81/40}{2} - \dfrac{16/40}{2} = 0,8125$
3. $P(-2 < X < 3) = P(1 < X < 3) = \dfrac{9/40}{2} - \dfrac{1/40}{2} = 0,1$
4. $P(2 < X < 5) = \dfrac{25/40}{2} - \dfrac{4/40}{2} = 0,2625$

5. $P(1 < X < x) = \dfrac{x^2}{80} - \dfrac{1}{80} = \dfrac{x^2 - 1}{80}$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{80} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 9 \\ 1 & \text{si} \quad x > 9 \end{cases}$$