Examen de Estadística

Problema 1 Una empresa de enlatado de cerveza ha detectado, que una de cada cien latas lleva menos cantidad de la que debería llevar. Con miras a futuras reclamaciones te hacen las siguientes preguntas:

1. Si la producción es de 10000 latas diarias, calcular la probabilidad de que se enlaten más de 120 latas con ese problema.

2. Con la misma producción diaria, calcular la probabilidad de que se enlaten más de 80, pero menos de 120 latas con ese problema.

3. Si aumentáramos la producción a 15000 latas diarias, calcular las dos probabilidades anteriores.

4. En ambos casos de producción, calcular la cantidad de latas, que presumiblemente, tendrán menos contenido del que deberían tener.

Solución

1.

$$p = \frac{1}{100} = 0,01, \;\; q = 1 - p = 0,99, \;\; n = 10000$$

$$\mu = np = 10000 \cdot 0,01 = 100, \;\; \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{99} = 9,95 \Longrightarrow$$

$$N(100; 9,95)$$

$$P(X > 120) = P\left(Z > \frac{120,5 - 100}{9,95}\right) = 1 - P(Z < 2,06) = 0,0197$$

2.

$$P(80 < X < 120) = P\left(\frac{80,5 - 100}{9,95} < Z < \frac{119,5 - 100}{9,95}\right) =$$

$$P\left(-1,96 < Z < 1,96\right) = P(Z < 1,96) - P(Z < -1,96) =$$

$$= 0,9750 - (1 - 0,9750) = 0,95$$

3.

$$p = \frac{1}{100} = 0,01, \;\; q = 1 - p = 0,99, \;\; n = 15000$$

$$\mu = np = 15000 \cdot 0,01 = 150, \;\; \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{150 \cdot 0,99} = 12,19 \Longrightarrow$$

$$N(150; 12,19)$$

$$P(X > 120) = P\left(Z > \frac{120,5 - 150}{12,19}\right) = P(Z > -2,42) =$$

$$= P(Z < 2,42) = 0,9922$$

4.

$$P(80 < X < 120) = P\left(\frac{80,5-150}{12,19}Z < \frac{119,5-150}{12,19}\right) =$$

$$P\left(-5,7 < Z < -2,5\right) = P(Z < -2,5) - P(Z < -5,7) =$$

$$= 1 - 0,9938 - (1-1) = 0,0062$$

5. Si $n = 10000$ entonces $E[X] = np = 100$.

   Si $n = 15000$ entonces $E[X] = np = 150$.

Problema 2 Se sabe que las notas de los alumnos que se presentan en Selectividad a la asignatura de Matemáticas siguen una normal de media 4 y con una desviación típica de 2. Con estos datos calcular:

1. Probabilidad de que un alumno obtenga una nota superior a 7.
2. Probabilidad de que la nota que obtenga esté entre 3 y 5.
3. Si se han presentado 12321 alumnos a este examen, estimar la cantidad de ellos que presumiblemente aprobarán el examen.

Solución:

1.

$$P(X > 7) = P\left(Z > \frac{7-4}{2}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 0,0668$$

2.

$$P(3 < X < 5) = P(-0,5 < Z < 0,5) = 2P(Z < 0,5) - 1 = 0,383$$

3.

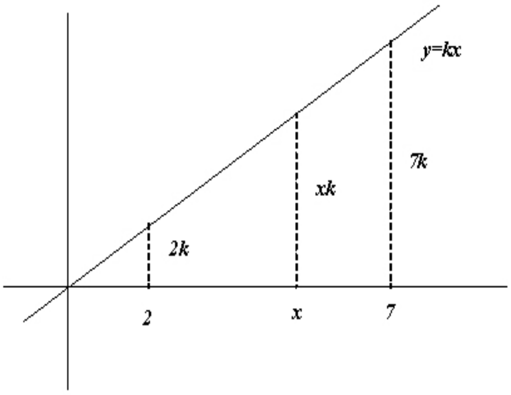
$$P(X > 5) = P(X > 0,5) = 1 - P(X < 0,5) = 0,3085$$

   Aprobarán $12321 \cdot 0,3085 = 3801$ alumnos.

Problema 3 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si} \quad x \in [2,7] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [2,7] \end{cases}$$

1. Calcular k de manera que $f(x)$ sea una función de densidad.
2. Calcular $P(X > 4)$.
3. Calcular $P(1 < X < 6)$.



4. Calcular $P(X < 3)$.

5. Calcular la función de distribución asociada a esta función.

Solución:

1.

$$S = \frac{49k}{2}, \quad s = \frac{4k}{2}, \quad S - s = 1 \Longrightarrow k = \frac{2}{45}$$

2.

$$P(X > 4) = P(4 < X < 7) = S_7 - s_4 = 0,866$$

3.

$$P(1 < X < 6) = P(2 < X < 6) = S_6 - s_2 = 0,71$$

4.

$$P(x < 3) = P(2 < X < 3) = S_3 - s_2 = 0,11$$

5. En el intervalo $[2, 7]$ el área que encierra la recta sería:

$$S - s = \frac{x^2 - 4}{45} \Longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 2 \leq x \\ \dfrac{x^2 - 4}{45} & \text{si} \quad x \in [2, 7] \\ 1 & \text{si} \quad x > 7 \end{cases}$$