

Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Abril 2005(recuperación)

Problema 1 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$

2. $f(x) = (x^2 + x + 7)(3x^2 + 1)$

Solución:

1. $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1} \implies f'(x) = -\frac{2(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)^2}$

2. $f(x) = (x^2 + x + 7)(3x^2 + 1) \implies f'(x) = 12x^3 + 9x^2 + 44x + 1$

Problema 2 Dada la función $f(x) = 2x^3 - 21x^2 - 48x + 1$, calcular sus máximos y sus mínimos utilizando el criterio de la segunda derivada.

Solución:

$$f'(x) = 6x^2 - 42x - 48 = 0 \implies x = -1, \quad x = 8$$

$$f''(x) = 12x - 42 \implies \begin{cases} f''(8) = 54 > 0 \implies x = 8 & \text{Mínimo} \\ f''(-1) = -54 < 0 \implies x = -1 & \text{Máximo} \end{cases}$$

Luego la función tiene un Mínimo en el punto $(-1, 26)$ y tiene un Máximo en el punto $(8, -703)$.

Problema 3 Resolver

1. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

2. Calcular k de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - kx + 1 & \text{si } x < 2 \\ 3kx - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

sea continua en todo R .

Solución:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 5) = 3$$

$$f(2) = 3$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 3$$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 2$, es más, es continua en todo R .

2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (kx^2 - kx + 1) = 2k + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3kx - 2) = 6k - 2$$

$$2k + 1 = 6k - 2 \implies k = \frac{3}{4}$$

Problema 4 Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 - 4x + 3} = 1$$

Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonía.
6. Máximos y Mínimos.
7. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-2\}$
2. Si hacemos $x = 0 \implies (0, 1/2)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \implies (1, 0)$.
- 3.

$$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{(-x+2)}$$

La función ni es par ni impar.

4.
 - **Verticales:** $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^+} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^-} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \infty \implies \text{No Hay}$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2} - x \right) = -4$$

$y = x - 4$

- 5.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2} = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \implies x = 1, \quad x = -5$$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$(1, \infty)$
$x + 5$	-	+	+
$x - 1$	-	-	+
$f'(x)$	+	-	+

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-5, 1)$.

6. En $x = -5$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo, que corresponde al punto $(-5, -12)$.

En $x = 1$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo, que corresponde al punto $(1, 0)$.

