Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2005

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2x^2 - ax + b) = 2 - a + b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - bx + 1) = a - b + 1$$

  Luego $2a - 2b - 1 = 0$

- Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - a & \text{si} \quad x < 1 \\ ax - b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4 - a, \quad f'(1^+) = 2a - b \Longrightarrow 3a - b - 4 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:

$$\begin{cases} 2a - 2b - 1 = 0 \\ 3a - b - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{4} \\ \\ b = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Problema 2 Dada la función $f(x) = x^4 - 14x^3 + 24x - 1$ Calcular:

1. Monotonia.
2. Máximos y Mínimos.
3. Curvatura

Solución:

1.

$$f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 = (x+3)(x-1)(x-2)$$

$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
decrece	crece	decrece	crece

Máximo en $x = 1$, Mínimos en $x = -3$ y $x = 2$

2.

$$f''(x) = 12x^2 - 28 \Longrightarrow x = 1,53; \;\; x = -1,53$$

$(-\infty, -1,53)$	$(-1,53; 1,53)$	$(1,53; \infty)$
$+$	$-$	$+$
convexa	cóncava	convexa

$$f'''(x) = 24x \Longrightarrow f'''(-1,53) \neq 0, \;\; f'''(1,53) \neq 0 \Longrightarrow$$

$x = -1,53$ y $x = 1,53$ son puntos de inflexión.