Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2005

Problema 1 Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^3 - 3x + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$
Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2ax^2 - bx - 1) = a - 3 + b$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^3 - 3x + b) = 2a - b - 1$$
Luego $-a + 2b - 2 = 0$

- Para que $f(x)$ sea derivable:
$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 3ax^2 - 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$
$$f'(1^-) = 4a - b, \quad f'(1^+) = 3a - 3 \Longrightarrow a - b + 3 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:
$$\begin{cases} -a + 2b - 2 = 0 \\ a - b + 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases}$$

Problema 2 Dada la función $f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 1$ Calcular:

1. Monotonia.
2. Máximos y Mínimos.
3. Curvatura

Solución:

1.
$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 - 12x + 60 = (x-1)(x+1)(x-5)$$

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
decrece	crece	decrece	crece

Máximo en $x = 1$, Mínimos en $x = -1$ y $x = 5$

2.

$$f''(x) = 36x^2 - 120x - 12 \Longrightarrow x = 3,43; \;\; x = -0,09$$

$(-\infty, -0,09)$	$(-0,09, 3,43)$	$(3,43, \infty)$
$+$	$-$	$+$
convexa	cóncava	convexa

$$f'''(x) = 72x - 120 \Longrightarrow f'''(-0,09) \neq 0, \;\; f'''(3,43) \neq 0 \Longrightarrow$$

$x = -0.09$ y $x = 3,43$ son puntos de inflexión.