Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2005

Problema 1 Calcular las siguientes derivadas:

$$\text{a) } y = \arctan(x^2 - 1) \quad \text{b) } y = e^x(\cos x - 1) \quad \text{c) } y = \ln\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)$$

$$\text{d) } y = e^{\sin x - 1} \quad \text{e) } y = \sqrt{x^2 - 1}$$

Solución:

a) $y' = \dfrac{2x}{1 + (x^2 - 1)^2}$

b) $y' = e^x(\cos x - 1) - e^x \sin x$

c) $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

d) $y' = \cos x e^{\sin x - 1}$

e) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Problema 2 Calcular los siguientes límites

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}$

2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}$

Solución:

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - 4x + 3} = 2$

2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4} = \frac{4}{3}$

Problema 3 Calcular la recta tangente y normal a la función

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 3}$ en el punto $x = 2$.

Solución:

$$a = 2, \quad b = f(2) = 1, \quad y - b = m(x - a)$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2} \Longrightarrow m = f'(2) = \frac{4}{5}$$

La recta tangente es $y - 1 = \frac{4}{5}(x - 2)$.

La recta normal es $y - 1 = -\frac{5}{4}(x - 2)$.

Problema 4 Dada la función $f(x) = \frac{2x^2}{x - 1}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{1\}$
2. Con el eje OY : $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{2x^2}{-x - 1}$$

   Luego ni es par ni es impar.
4. - **Verticales:** $x = 1$

     $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

     $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

   - **Horizontales:**

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

     Luego no hay

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x-3} - 2x \right) = 2$$

$$y = 2x + 2$$

5.