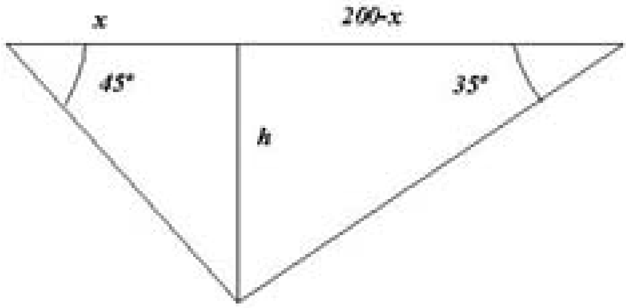
Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Final Junio 2004

Problema 1 Un submarino desciende hacia el fondo del mar con una inclinación de 35º. Cuando llega al fondo , y después de realizar los pertinentes trabajos, asciende a la superficie con un ángulo de 45º. Cuando ha emergido completamente comprueba que se ha desplazado 200 metros desde el punto donde empezó la inmersión. Se pide calcular la profundidad del mar en el punto en el que estubo trabajando el submarino.

Solución:



$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 35^{\circ} = \dfrac{h}{200 - x} \\ \\ \tan 45^{\circ} = \dfrac{h}{x} \end{array} \right. \Longrightarrow h = 82,3673m$$

Problema 2 Resolver la ecuación trigonométrica

$$\tan x + \cos 2x = 1$$

Solución:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \cos^2 x - \sin^2 x = 1 \Longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin^2 x = 0 \Longrightarrow \sin x - 2\sin^2 x \cos x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sin x(1-2\sin x\cos x)=0 \Longrightarrow \sin x(1-\sin 2x)=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x=0 \Longrightarrow x=0,\;\; x=\pi \\ \sin 2x=1 \Longrightarrow x=\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

Problema 3 Dado el triángulo formado por los puntos $A(2,1)$, $B(3,2)$ y $C(4,1)$, se pide:

1. Calcular las ecuaciones de sus mediatrices.
2. Calcular el circuncentro.
3. Calcular la ecuación de la circunferencia circunscrita a este triángulo.

Solución:

1. La mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos (x,y) que cumplen

   $$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} \Longrightarrow x+y-4=0$$

   La mediatriz del segmento $\overline{BC}$ es el lugar geométrico de los puntos (x,y) que cumplen

   $$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} \Longrightarrow x-y-2=0$$

   La mediatriz del segmento $\overline{AC}$ es el lugar geométrico de los puntos (x,y) que cumplen

   $$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} \Longrightarrow x-3=0$$

2. El circuncentro es el punto en el que se cortan las tres rectas anteriores, basta con resolver el sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} x+y-4=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Longrightarrow (3,1)$$

3. La distancia de este punto a uno de vértices es el radio de la circunferencia circunscrita $r=\sqrt{(3-2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{1}=1$ y tendremos

   $$(x-3)^2+(y-1)^2=1 \Longrightarrow x^2+y^2-6x-2y+9=0$$

Problema 4 Sea la función

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

Se pide:

1. Calcular el área que encierra esta función el eje OX, las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

2. Calcular Las rectas tangente y normal a la función en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

1.

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4|\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

2.

$$f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}; \quad m = f'(1) = \frac{3}{25}; \quad f(1) = \frac{1}{5}$$

La recta tangente es $y - \frac{1}{5} = \frac{3}{25}(x-1) \Longrightarrow 3x - 2y + 2 = 0$.

La recta normal es $y - \frac{1}{5} = -\frac{25}{3}(x-1) \Longrightarrow 125x + 15y - 128 = 0$.

Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}$$

1. Calcular su dominio

2. Calcular sus asíntotas.

Solución:

1. Por ser una raiz, tiene que ser

$$\frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-1}{x^2-4}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego $Dom f = (-\infty,-2) \cup [-1,1] \cup (2,\infty)$

2. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}=\left[\sqrt{\frac{3}{0^+}}\right]=+\infty\Longrightarrow x=2$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}=\left[\sqrt{\frac{3}{0^+}}\right]=+\infty\Longrightarrow x=-2$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}=1\Longrightarrow y=1$$

Asíntotas oblicuas: No hay, ya que hemos encontrado horizontales.

Problema 6 Representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

Solución:

1. **Dominio:** $Dom f = R - \{1\}$

2. **Puntos de Corte:**

   - Con el eje OY:

   $$x=0\Longrightarrow f(0)=0\Longrightarrow (0,0)$$

   - Con el eje OX:

   $$f(x)=0\Longrightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2}=0\Longrightarrow x=0\Longrightarrow (0,0)$$

3. **Simetrias:**

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=-\frac{x^3}{(x+1)^2}\Longrightarrow \text{ni par ni impar}$$

4. **Asíntotas:**

   - **Verticales:**

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty\\[2ex]\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty\end{array}\right.\Longrightarrow x=1$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty\Longrightarrow \text{no hay}$$

- **Oblicuas:** $y=mx+n$

$$\left\{\begin{array}{l} m=\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x}=1 \\ \\ n=\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=2 \end{array}\right. \Longrightarrow y=x+2$$

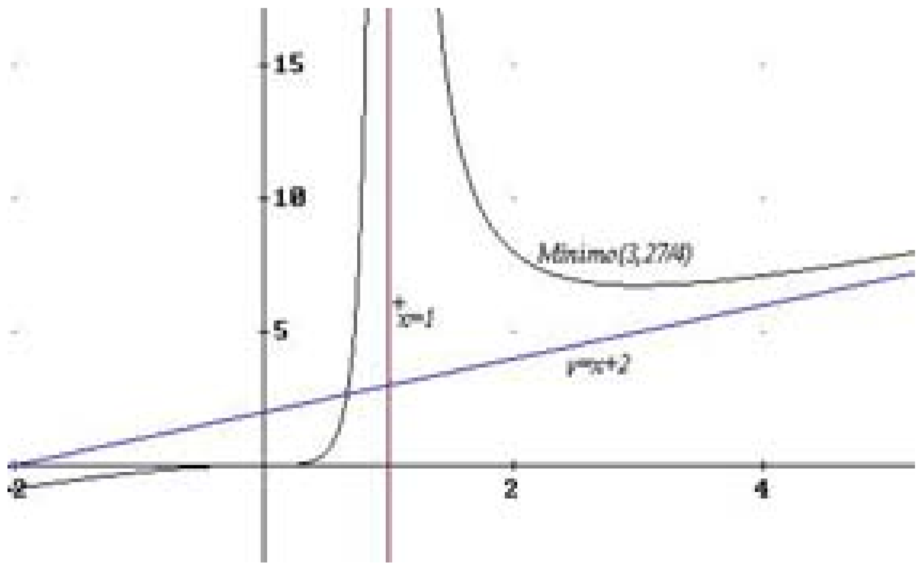
5. **Extremos:**

$$f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0\Longrightarrow x=0,\ \ x=3$$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

En el punto $\left(3,\dfrac{27}{4}\right)$ la función tiene un mínimo.

6. **Dibujo de la gráfica:**



Problema 7 Calcular dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u} = (3, -1)$ que tengan de módulo 8.

Solución:
Dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u}$ serían $\overrightarrow{u_1} = (1, 3)$ y $\overrightarrow{u_2} = (-1, -3)$. Tenemos $|\overrightarrow{u_1}| = |\overrightarrow{u_2}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

Los vectores $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}} \right) \\ \\ \overrightarrow{v_2} = \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{10}}, \dfrac{-3}{\sqrt{10}} \right) \end{array} \right.$ son perperpendiculares al dado y tienen de módulo 1. Luego

$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{w_1} = 8\overrightarrow{v_1} = \left(\dfrac{8}{\sqrt{10}}, \dfrac{24}{\sqrt{10}} \right) \\ \\ \overrightarrow{w_2} = 8\overrightarrow{v_2} = \left(\dfrac{-8}{\sqrt{10}}, \dfrac{-24}{\sqrt{10}} \right) \end{array} \right.$ son vectores perpendiculares al dado y tienen módulo 8.

Problema 8 Sea la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 2kx^2 + 2x - 1 & \text{si} & x < 1 \\ x^2 - k^2x - 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

1. Calcular k para que $f(x)$ sea continua R.
2. Comprobar si la función es derivable para ese valor de k que hemos calculado anteriormente.

Solución:

1. Para que $f(x)$ sea continua en $x < 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2kx^2 + 2x - 1) = 2k + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (x^2 - k^2x - 1) = -k^2$$

$$2k + 1 = -k^2 \Longrightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

2. La función sería

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 2x^2 + 2x - 1 & \text{si} & x < 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

Para que la función sea derivable debe ser $f'(1^-) = f'(1^+)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{no es derivable en } x = 1$$