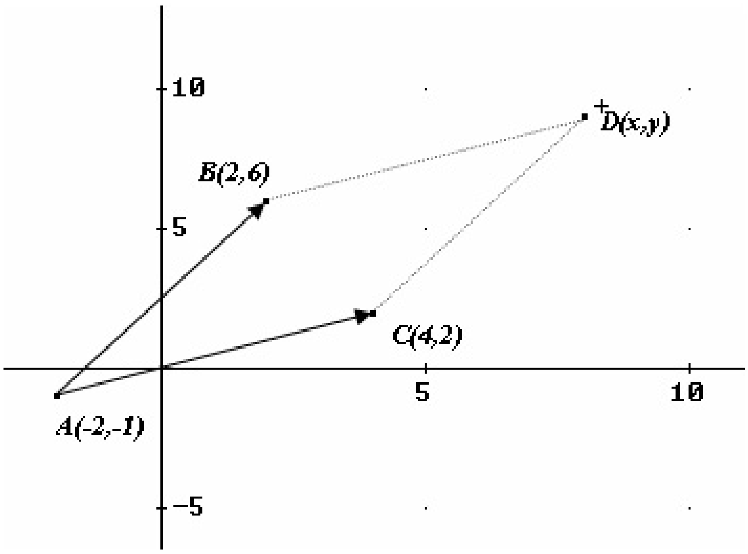
Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Octubre 2003

Problema 1 *(4 puntos)* Dados los puntos $A(-2,-1)$, $B(2,6)$ y $C(4,2)$, se pide:

1. Encontrar un punto D de manera que estos cuatro puntos formen un paralelogramo y encontrar su centro.
2. Calcular sus ángulos y la longitud de sus lados.
3. Encontrar todos los vectores perpendiculares al vector $\overrightarrow{AB}$ que tengan módulo 8.

Solución:



Al no especificar el problema si estos vértices están consecutivos hay varias soluciones posibles, yo voy a pensar que no lo están y encontraré una solución.

1. $\overrightarrow{AC} = (4,2) - (-2,-1) = (6,3)$. Luego

$$D = (2,6) + (6,3) = (8,9)$$

El punto medio sería: (entre B y C)

$$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = M(3,4)$$

2. $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45}\,u$

   Para calcular el otro lado calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (2,6) - (-2,-1) = (4,7)$.

   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}\,u$

   Ahora calculamos los ángulos:

   (a) Sea α el ángulo con vértice en A:

   $$\overrightarrow{AB} = (4,7);\ \overrightarrow{AC} = (6,3)$$

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot 6 + 7\cdot 3 = 45$$

   $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{65};\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{45}$$

   $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{45}{\sqrt{45}\sqrt{65}} = 0,83205 \Longrightarrow \alpha = 33^{\circ}41'24''$$

   (b) Sea β el ángulo con vértice en C:

   $$\overrightarrow{CA} = (-2,-1)-(4,2) = (-6,-3);\ \overrightarrow{CD} = (8,9)-(4,2) = (4,7)$$

   $$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} = -6\cdot 4 + (-3)\cdot 7 = -45$$

   $$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AC}|\sqrt{45};\ |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{65}$$

   $$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CD}|} = \frac{-45}{\sqrt{45}\sqrt{65}} = -0,83205 \Longrightarrow \beta = 146^{\circ}18'36''$$

   (c) Sea $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (4,7)$ y su módulo $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{65}$. Un vector que tenga módulo uno con la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{u}$ sería:

   $$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{(4,7)}{\sqrt{65}} = \left(\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right)$$

   Para obtener otro de módulo 8:

   $$\overrightarrow{u_2} = 8\overrightarrow{u_1} = 8\left(\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right) = \left(\frac{32}{\sqrt{65}}, \frac{56}{\sqrt{65}}\right)$$

   Los dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u}$ que estamos buscando serán:

   $$\overrightarrow{w_1} = \left(-\frac{56}{\sqrt{65}}, \frac{32}{\sqrt{65}}\right),\quad \overrightarrow{w_2} = \left(\frac{56}{\sqrt{65}}, -\frac{32}{\sqrt{65}}\right)$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dado el punto $P(2,-1)$, calcular la distancia de éste a las siguientes rectas:

1.
$$r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

2.
$$s : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1}$$

Solución:

1.
$$\lambda = \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} \Longrightarrow 2x + y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

2.
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} \Longrightarrow x + 2y - 1 = 0$$

$$d(P, s) = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dado el triángulo de vértices $A(-3,1)$, $B(1,7)$ y $C(5,-1)$, calcular:

1. El circuncentro (punto en el que se cortan las mediatrices)
2. Una recta que una dos vértices del triángulo.

Solución:

1. Calculamos dos de sus mediatrices:

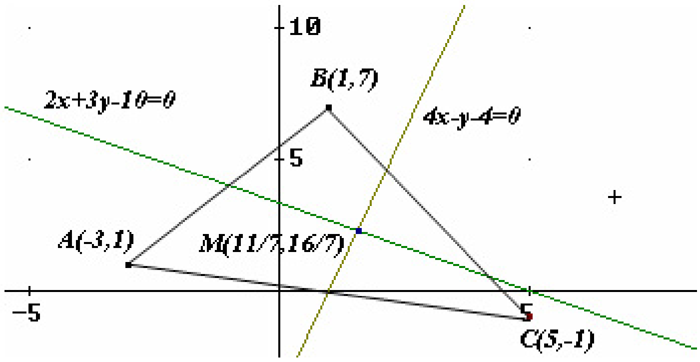
   Entre A y B

   $$\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2}$$

   $$x^2+9+6x+y^2+1-2y = x^2+1-2x+y^2+49-14y \Longrightarrow 2x+3y-10 = 0$$

   Entre A y C

   $$\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}$$



$x^2+9+6x+y^2+1-2y = x^2+25-10x+y^2+1+2y \Longrightarrow 4x-y-4=0$

El punto de intersección de estas dos rectas será el circuncentro y vendrá dado por la solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-10=0 \\ 4x-y-4=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{11}{7}, \frac{16}{7}\right)$$

2. Calculo la recta que une A y B:

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,7)-(-3,1) = (4,6) \\ A(-3,1) \end{array}\right.$$

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{6} \Longrightarrow 3x-2y+11=0$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$. Calcular la tangente y la normal a su gráfica en el punto $x=1$.

Solución:

Calculamos la tangente a su gráfica en el punto $x=1$:

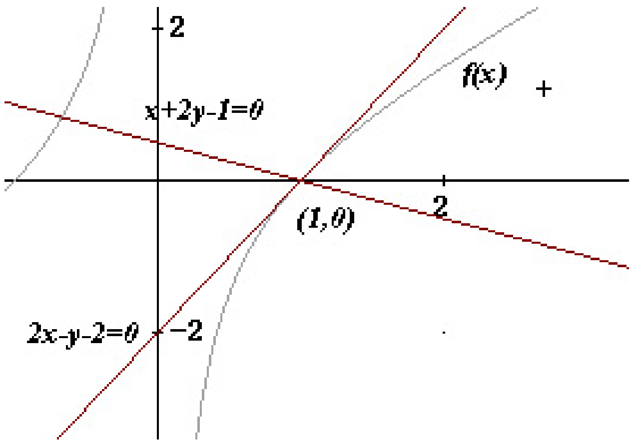
$f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \Longrightarrow m = f'(1) = 2$

Calculamos el valor de la función en el punto $x=1$:

$f(1) = 0$.

La ecuación de la tangente será: $y-0 = 2(x-1) \Longrightarrow 2x-y-2=0$

La ecuación de la normal será: $y-0 = -\dfrac{1}{2}(x-1) \Longrightarrow x+2y-1=0$


2
f(x)
x+2y-1=0
2
(1,0)
2x-y-2=0
−2