Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Noviembre 2003

Problema 1 *(3 puntos)* Los puntos $A(-2,-1)$, $B(1,4)$ y $C(3,1)$ forman un triángulo, se pide:

1. Calcular el circuncentro (punto en el que se cortan las mediatrices).
2. Calcular sus ángulos y la longitud de sus lados.
3. Calcular la altura del vertice B.

Solución:

1. Calculamos la mediatriz del lado $\overline{AB}$:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}\Longrightarrow 3x+5y-6=0$$

Calculamos la mediatriz del lado $\overline{BC}$:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}\Longrightarrow 4x-6y+7=0$$

El circuncentro será la solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+5y-6=0 \\ 4x-6y+7=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{1}{38},\frac{45}{38}\right)$$

2. (a) Ahora calculamos sus lados:

$$\overrightarrow{AB}=(1,4)-(-2,-1)=(3,5)\Longrightarrow \overrightarrow{BA}=(-3,-5)$$

$$\overrightarrow{AC}=(3,1)-(-2,-1)=(5,2)\Longrightarrow \overrightarrow{CA}=(-5,-2)$$

$$\overrightarrow{BC}=(3,1)-(1,4)=(2,-3)\Longrightarrow \overrightarrow{BC}=(-2,3)$$

La longitud del lado $\overline{AB}$:

$$|\overline{AB}|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}u$$

La longitud del lado $\overline{AC}$:

$$|\overline{AC}|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}u$$

La longitud del lado $\overline{AB}$:

$$|\overline{BC}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}u$$

(b) Ahora calculamos los ángulos: Sea α el ángulo que forman $\widehat{BAC}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{15+10}{\sqrt{34}\sqrt{29}} = 0,7961 \Longrightarrow \alpha = 37^{\text{o}}14'5''$$

Sea β el ángulo que forman $\widehat{ABC}$:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-6+15}{\sqrt{34}\sqrt{13}} = 0,428086 \Longrightarrow \beta = 64^{\text{o}}39'14''$$

Sea γ el ángulo que forman $\widehat{BCA}$:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|} = \frac{10-6}{\sqrt{13}\sqrt{29}} = 0,2060 \Longrightarrow \gamma = 78^{\text{o}}6'41''$$

3. La altura será la distancia del punto B a la recta r que pasa por los puntos A y C:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (3,1)-(-2,-1) = (5,2) \\ C(3,1) \end{array}\right. \Longrightarrow 2x-5y-1=0$$

$$d(B,r) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 1+(-5)4+(-1)|}{\sqrt{4+25}} = \frac{19\sqrt{29}}{29}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Calcular la ecuación de la elipse de excentricidad $e = \dfrac{1}{4}$ y cuya distancia focal es 4.

Solución:

Tenemos que $2c = 4 \Longrightarrow c = 2$

$$e = \frac{1}{4} = \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{a} \Longrightarrow a = 8$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 64 = b^2 + 4 \Longrightarrow b^2 = 60$$

Luego la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{60} = 1$$

Problema 3 *(3 puntos)* Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,1)$, $B(2,0)$ y $C(2,2)$, y las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto C.

Solución:

La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, sustiyuyendo los puntos tenemos:

$$\left\{\begin{array}{llll} & & n & +p = 0 \\ 4+ & 2m & & +p = 0 \\ 8+ & 2m & +2n & +p = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = -\frac{5}{2} \\ n = -2 \\ p = 1 \end{array}\right.$$

La ecuación queda de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 2 = 0$$

Calculamos la recta tangente y normal en $C(2, 2)$:

$$4xdx + 4ydy - 5dx - 4dy = 0 \Longrightarrow (4x - 5)dx + (4y - 4)dy = 0$$

$$(4y - 4)dy = -(4x - 5)dx \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{4x - 5}{4y - 4} \Longrightarrow m = -\frac{3}{4}$$

La recta tangente será: $y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 2)$

La recta normal será: $y - 2 = \frac{4}{3}(x - 2)$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}\right)$
2. $y = e^{x^2 - x - 1}$
3. $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$
4. $y = (x^2 + 1)(x - 1)$

Solución:

1. $y = \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}\right) = \ln(x^2 - 1) - \ln(x + 2)$

   $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$
2. $y = e^{x^2 - x - 1}$

   $y' = (2x - 1)e^{x^2 - x - 1}$
3. $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$

   $y' = \dfrac{4x(x - 1) - (2x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - 1}{(x - 1)^2}$

4. $y = (x^2 + 1)(x - 1)$

$y' = 2x(x - 1) + (x^2 + 1) = 3x^2 - 2x + 1$