Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2004

Problema 1

Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 12}$$

1. Estudiar el dominio, puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y determinar sus extremos relativos.
2. Calcular sus asíntotas.
3. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. Consta de varios apartados:

   (a) **Dominio:** $Dom f(x) = R - \{-4, 3\}$

   (b) **Puntos de Corte:**
   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   (c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + (-x) - 12} = \frac{-x^3}{x^2 - x - 12} \neq \pm f(x)$$

   (d) **Monotonía:**

   $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 2x - 36)}{(x^2 + x - 12)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -7,08,\ x = 5,08$$

   Para estudiar el signo de $f'(x)$ observamos que tan sólo basta con estudiar el signo de $x^2 + 2x - 36$ pues los otros factores están elevados al cuadrado y, por tanto, son siempre positivos.

	$(-\infty, -7,08)$	$(-7,08, 5,08)$	$(5,08, +\infty)$
$x + 7,08$	$-$	$+$	$+$
$x - 5,08$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

(e) **Extremos relativos:** A la vista del apartados anterior observamos que en el punto de abcisa $x = -7,08$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, se trata de un **máximo**, que corresponde al punto $(-7,08; -11,43)$. Si observamos ahora el punto de abcisa $x = 5,08$ la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, estamos ante un **mínimo**, que corresponde al punto $(5,08; 6,94)$

2. **Asíntotas:**

- **Verticales:**

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow -4^-} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = -\infty \\ \\ \lim_{x\longrightarrow -4^+} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = -4$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 4^-} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = -\infty \\ \\ \lim_{x\longrightarrow 4^+} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = 3$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+x-12} = \infty \Longrightarrow \text{No hay Horizontales}$$

- **Oblicuas:** La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si

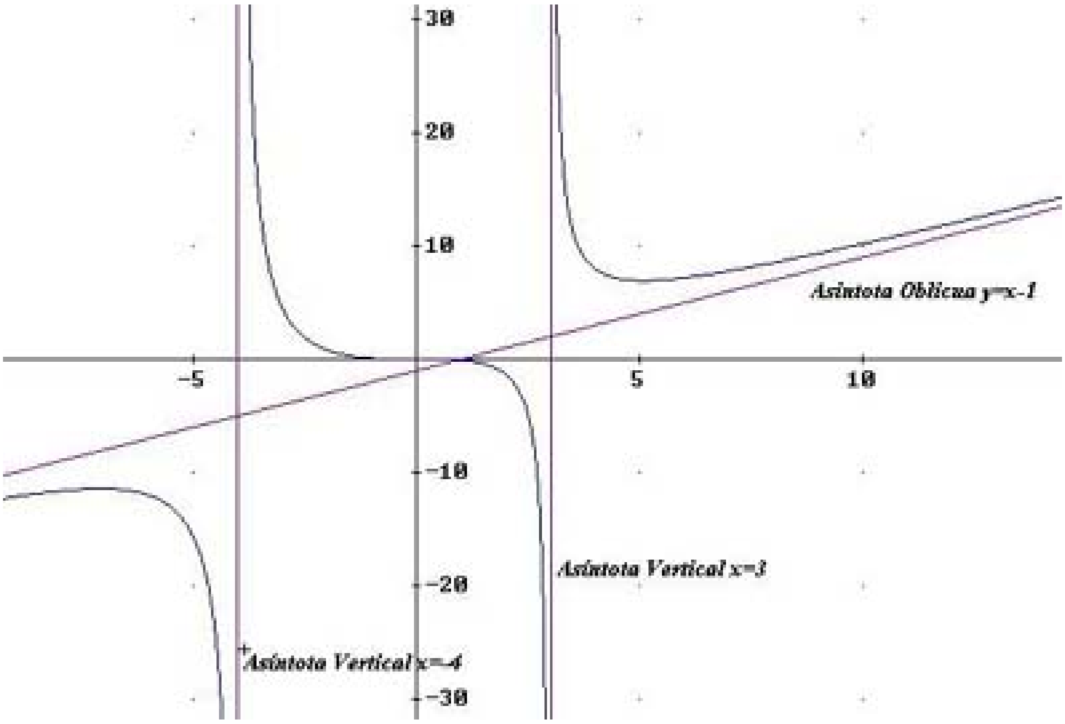
$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^3+x^2-12x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - nx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+x-12} - x \right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-x^2+12}{x^2+x-12} = -1$$

La recta $y = x - 1$ es una asíntota Oblicua.

3. **Representación Gráfica de la función:** Con los datos obtenidos hasta ahora es suficiente para hacer una representación gráfica bastante precisa de la función que nos ocupa.



Problema 2 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \\ ax^3 + bx^2 - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcular los parámetros a y b, de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 = \dfrac{4a + 4b + 1}{2} \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} ax^3 + bx^2 - 1 = 8a + 4b - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{4a + 4b + 1}{2} = 8a + 4b - 1 \Longrightarrow 12a + 4b - 3 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x \le 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$2a + b = 12a + 4b \Longrightarrow 10a + 3b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} 12a + 4b & -3 = 0 \\ 10a + 3b & = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{9}{4} \\ \\ b = \dfrac{15}{2} \end{array}\right.$$