Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2004

Problema 1

Dada la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y la recta $y = 2x + 1$

1. Calcular los extremos relativos de $f(x)$.
2. Estudiar la concavidad de $f(x)$.
3. Dibujar las gráficas de la función, de la recta, y señalar el recinto que encierran.
4. Calcular el área de dicho recinto.
5. Calcular la recta tangente y la recta normal a $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

1. **Extremos relativos:**

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{3},\ x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$f''(x) = 6x \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -2\sqrt{6} < 0 \Longrightarrow \text{Mínimo } \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{9+4\sqrt{6}}{9}\right) \\ \\ f''\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 2\sqrt{6} > 0 \Longrightarrow \text{Máximo } \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{9+4\sqrt{6}}{9}\right) \end{array} \right.$$

2. **Concavidad:**
Observando la derivada $f''(x) = 6x$ nos damos cuenta que $f''(x) > 0$ en el intervalo $(0, +\infty)$ y, por tanto, en este intervalo la función será convexa. Por el contrario, $f''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y, por tanto, en este intervalo la función es cóncava.

3. **Dibujo de las gráficas:**
De la función $f(x)$:

   (a) **Dominio:** $Dom f(x) = R$

   (b) **Puntos de Corte:**

   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (-1,618033988; 0),\ (0,6180339887; 0),\ (1, 0)$$

(c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

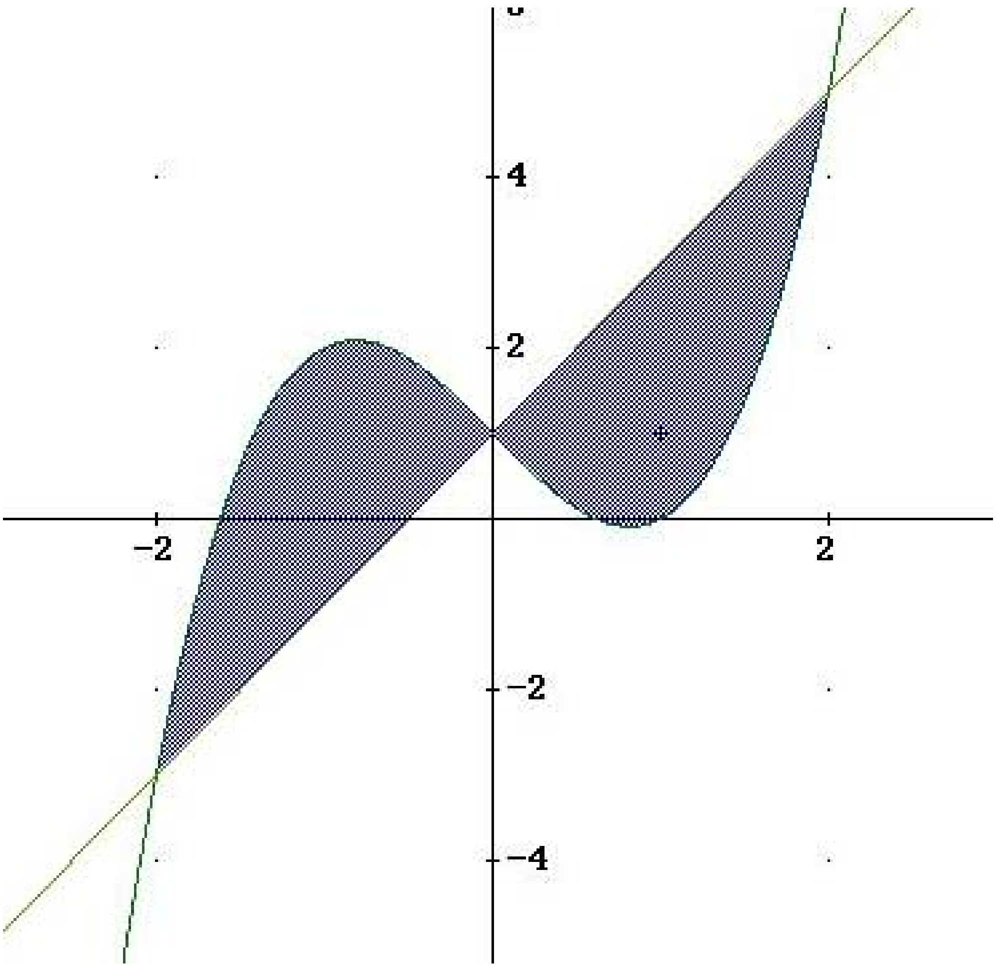
$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) + 1 = -x^3 + 2x + 1 \neq \pm f(x)$$

(d) **Monotonía:** No es necesaria

(e) **Asíntotas:** No hay

De la recta $y = 2x + 1$:

Con dos puntos de ella tendremos suficiente, por ejemplo el $(0, 1)$ y el $(-1/2, 0)$.



4. **Cálculo del área:**
Para calcular el área de este recinto calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$x^3 - 2x + 1 = 2x + 1 \Longrightarrow x = -2,\ x = 2,\ x = 0$$

Tendremos que calcular el área en el intervalo $[-2, 0]$ y luego en el intervalo $[0, -2]$. Calculamos la integral

$$\int (x^3 - 2x + 1 - 2x - 1)\, dx = \int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$$

En el intervalo $[-2, 0]$:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 4$$

En el intervalo $[0, 2]$:

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} = -4$$

La razón por la que el área en este caso es negativa es porque la recta está por encima de la función, tendremos que coger su valor absoluto y nos queda:

Área$= |4| + |-4| = 8$ u^2.

5. **Cálculo de la tangente y la normal:** Para calcular la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ calculamos su derivada primera

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \Longrightarrow m = f'(2) = 10$$

Por otra parte $f(2) = 5$ y tendremos que la ecuación de la **recta tangente** es

$$y - 5 = 10(x - 2)$$

y la ecuación de la **recta normal** es

$$y - 5 = -\frac{1}{10}(x - 2)$$