Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2004

Problema 1

Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 15}$$

1. Estudiar el dominio, puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y determinar sus extremos relativos.
2. Calcular sus asíntotas.
3. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. Consta de varios apartados:

   (a) **Dominio:** $Dom f(x) = R - \{-5, 3\}$

   (b) **Puntos de Corte:**
   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$

   (c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 2(-x) - 15} = \frac{-x^3}{x^2 - 2x - 15} \neq \pm f(x)$$

   (d) **Monotonía:**

   $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 4x - 45)}{(x^2 + 2x - 15)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -9,\ x = 5$$

   Para estudiar el signo de $f'(x)$ observamos que tan sólo basta con estudiar el signo de $x^2 + 4x - 45$ pues los otros factores están elevados al cuadrado y, por tanto, son siempre positivos.

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 5)$	$(5, +\infty)$
$x + 9$	$-$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

(e) **Extremos relativos:** A la vista del apartados anterior observamos que en el punto de abcisa $x = -9$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, se trata de un **máximo**, que corresponde al punto $(-9; -15, 19)$. Si observamos ahora el punto de abcisa $x = 5$ la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, estamos ante un **mínimo**, que corresponde al punto $(5; 6, 25)$

2. **Asíntotas:**

- **Verticales:**

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -5^-} \dfrac{x^3}{x^2+2x-15} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -5^+} \dfrac{x^3}{x^2+2x-15} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = -5$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} \dfrac{x^3}{x^2+2x-15} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} \dfrac{x^3}{x^2+2x-15} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = 3$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^2+2x-15} = \infty \Longrightarrow \text{No hay Horizontales}$$

- **Oblicuas:** La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si

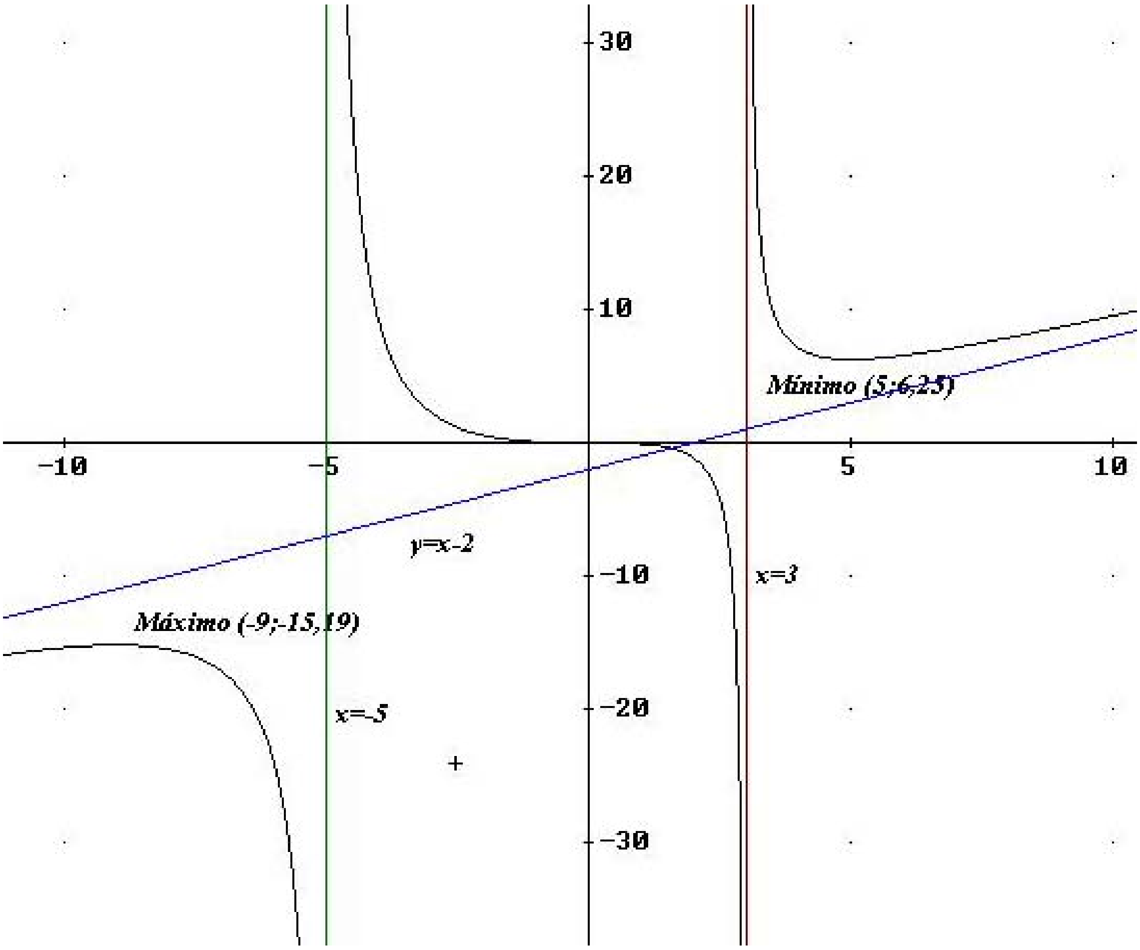
$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^3+2x^2-15x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - nx) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-15} - x\right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-2x^2+15}{x^2+2x-15} = -2$$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota Oblicua.

3. **Representación Gráfica de la función:** Con los datos obtenidos hasta ahora es suficiente para hacer una representación gráfica bastante precisa de la función que nos ocupa.



Problema 2 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \\ ax^3 + bx^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcular los parámetros a y b, de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 = 6a - 2b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} ax^3 + bx^2 = 8a + 4b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$6a - 2b + 1 = 8a + 4b \Longrightarrow 2a + 6b - 1 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax - b & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$6a - b = 12a + 4b \Longrightarrow 6a + 5b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2a + 6b & -1 = 0 \\ 6a + 5b & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{26} \\ \\ b = \dfrac{3}{13} \end{cases}$$