Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2003

1. Calcular las siguientes derivadas

   (a) $f(x) = \dfrac{e^{2x} + x^2}{\sin x}$

   Solución:

   $$f'(x) = \frac{(2e^{2x} + 2x)\sin x - (e^{2x} + x^2)\cos x}{\sin^2 x}$$

   (b) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right)$

   Solución:

   $$f'(x) = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{1 + \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)^2} = -\frac{1}{(2\sqrt{x})\left(1 + \frac{x}{(x-1)^2}\right)} =$$

   $$= -\frac{(x-1)^2}{2\sqrt{x}\,((x-1)^2 + x)}$$

   (c) $f(x) = (x^2 - 1)\sin(x^2)$

   Solución:

   $$f'(x) = 2x\sin x^2 - 2x(x^2-1)\cos x^2 = 2x(\sin x^2 - (x^2-1)\cos x^2)$$

2. Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $6\,cm$.

   Solución:

   Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \dfrac{x(6-x)}{2} = \dfrac{6x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 3 - x = 0 \Longrightarrow x = 3$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 3$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 3$ e $y = 3$, con un área $S(3) = \dfrac{9}{2}\ u^2$

3. Representar la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

   Solución:

   - **Dominio**

     El denominador se anula cuando $x - 1 = 0$ luego el dominio será $R - \{1\}$.

   - **Puntos de corte**

     Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un punto de corte.

     Si hacemos $\dfrac{2x^2}{x-1} = 0 \Longrightarrow 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$, obtenemos el mismo punto de corte.

   - **Simetrías**

     $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2}{-x-1} \Longrightarrow$ no hay simetrías.

   - **Asíntotas**

     (a) **Verticales** El denominador se anula cuando $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$ es la posible asíntota.

     $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{2x^2}{x-1} = \pm\infty$, luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

     (b) **Horizontales** Calculamos el limite de la función cuando $x \longrightarrow \pm\infty$

     $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2}{x-1} = \infty$, luego no hay asíntotas horizontales.

(c) **Oblicuas** La recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{x-1} \right) = 2$$

Luego la asíntota oblicua buscada es $y = 2x + 2$

- **Puntos críticos** Para calcularlos hacemos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = 2$$

Para comprobar si se trata de un máximos o un mínimos observamos que el denominador de la segunda derivada es siempre positivo. Por tanto, para decidir el signo de $f'(x)$ sólo tenemos que estudiar el numerador.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$x(x-2)$	$+$	$-$	$+$
	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(0, 0)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego es un máximo.

En el punto $(2, 8)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego es un mínimo.

Con estos datos tenemos suficiente información para dibujar la gráfica de esta función.

Función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$