Examen de Matemáticas

1º Bachillerato (Marzo 2003)

1. **Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$, calcular el radio y la recta tangente a esta circunferencia en el punto $P(4,3)$. Expresar la ecuación de ella en forma paramétrica, continua y general.**

   Solución:

   Calculamos el centro y el radio de la circunferencia

   $$\begin{cases} m = -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \\ n = -2b = -2 \Rightarrow b = 1 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(3,1) \\ r = \sqrt{5} \end{cases}$$

   El vector que une el centro con el punto de tangencia será :

   $$\overrightarrow{CP} = (4,3) - (3,1) = (1,2)$$

   $$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2,1) \text{ perpendicular a } \overrightarrow{CP} \\ P(4,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \text{ (ecuación paramétrica)}$$

   $$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{1} \text{ (ecuación continua)}$$

   $$x + 2y - 10 = 0 \text{ (ecuación general)}$$

2. **a) Si la ecuación reducida de una elipse es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, calcular los vértices, los focos y su excentricidad.**

   Solución:

   $$\begin{cases} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 3 \end{cases}$$

   Los vértices serán:

$A(5,0),\ A'(-5,0),\ B(0,4),\ B'(0,-4),\ F(3,0)$ y $F'(-3,0)$

La excentricidad será :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0,6$$

b) Hallar la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que tiene de vértices *A*(8,0), *A'*(-8,0) y su excentricidad vale *e*=3.

Solución:

$$\begin{cases} 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \\ e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = 3 \cdot 8 = 24 \\ c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 512 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{512} = 1$$

3. Calcular el ángulo formado por las rectas:

a.

$$r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}$$
$$s: \quad 3x - y - 1 = 0$$

b.

$$r: 2x - 8y + 1 = 0$$
$$s: x + y - 2 = 0$$

Solución:

a.

$$\begin{cases} r: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} \\ s: \quad 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r: x + 2y - 1 = 0 \\ s: \quad 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{|1 \cdot 3 + 2(-1)|}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{2}}{10} = 0,1414 \Rightarrow \alpha = 81^{o}52'12''$$

b.

$$\begin{cases} r: 2x - 8y + 1 = 0 \\ s: x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{|2 \cdot 1 + 1(-8)|}{\sqrt{4+64} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{136}} = 0,5145 \Rightarrow \alpha = 59^{o}2'11''$$

4. **Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $x+6=0$ y del punto (5,0).**

   Solución:

   Sea $P(x,y)$ la distancia de este punto a la recta tiene que ser igual a la distancia de este punto al punto $C(5,0)$.

$$\begin{cases} d(P,C)=\sqrt{(x-5)^2+y^2} \\ d(P,r)=\dfrac{|x+6|}{\sqrt{1}}=x+6 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+y^2}=x+6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=22x+11$$

5. **Calcular la circunferencia que pasa por los puntos (2,1), (0,1) y (1,0).**

   Solución:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\begin{cases} 2m+n+p+5=0 \\ \quad n+p+1=0 \\ m \quad +p+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=-2 \\ p=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-2x-2y+1=0$$