Examen de Matemáticas

1º Bachillerato (Marzo 2003)

1. **Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$, calcular el radio y la recta tangente a esta circunferencia en el punto $P(2,2)$. Expresar la ecuación de ella en forma paramétrica, continua y general.**

   Solución:

   Calculamos el centro y el radio de la circunferencia

$$\begin{cases} m = -2a = -1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2} \\ n = -2b = -3 \Rightarrow b = \dfrac{3}{2} \\ p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \\ r = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

   El vector que une el centro con el punto de tangencia será :

$$\overrightarrow{CP} = (2,2) - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \text{ perpendicular a } \overrightarrow{CP} \\ P(2,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \dfrac{1}{2}t \\ y = 2 + \dfrac{3}{2}t \end{cases} \text{ (ecuación paramétrica)}$$

$$\frac{x-2}{-1/2} = \frac{y-2}{3/2} \text{ (ecuación continua)}$$

$$3x + y - 8 = 0 \text{ (ecuación general)}$$

2. **a) Si la ecuación reducida de una elipse es $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, calcular los vértices, los focos y su excentricidad.**

   Solución:

$$\begin{cases} a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \\ b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \\ a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{11} \end{cases}$$

Los vértices serán:

$$A(6,0),\ A'(-6,0),\ B(0,5),\ B'(0,-5),\ F\left(\sqrt{11},0\right) \text{ y } F'\left(-\sqrt{11},0\right)$$

La excentricidad será :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{11}}{6} = 0{,}5527707983$$

b) Hallar la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que tiene de vértices *A*(6,0), *A'*(-6,0) y su excentricidad vale *e*=2.

Solución:

$$\begin{cases} 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \\ e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = 2 \cdot 6 = 12 \\ c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 108 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{108} = 1$$

3. **Calcular el ángulo formado por las rectas:**

a.

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2}$$
$$s: \quad 2x - 3y - 1 = 0$$

b.

$$r: 3x - 5y + 1 = 0$$
$$s: x + 2y - 1 = 0$$

Solución:

a.

$$\begin{cases} r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} \\ s: 2x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r: 2x + y - 3 = 0 \\ s: 2x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{|2 \cdot 2 + 1(-3)|}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{4+9}} = \frac{1}{\sqrt{65}} = 0{,}1240347345 \Rightarrow \alpha = 82{,}87498365^{\text{o}}$$

b.

$$\begin{cases} r: 3x - 5y + 1 = 0 \\ s: x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{|3 \cdot 1 + (-5)2|}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{7}{\sqrt{170}} = 0{,}5368754921 \Rightarrow \alpha = 57.52880770^{o}$$

4. **Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $x + 8 = 0$ y del punto (1,0).**

   Solución:

   Sea $P(x, y)$ la distancia de este punto a la recta tiene que ser igual a la distancia de este punto al punto $C(1,0)$.

$$\begin{cases} d(P,C) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ d(P,r) = \dfrac{|x+8|}{\sqrt{1}} = x + 8 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 18x + 63$$

5. **Calcular la circunferencia que pasa por los puntos (1,0), (0,3) y (2,2).**

   Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\begin{cases} m + \phantom{2n+{}} p + 1 = 0 \\ \phantom{2m+{}} 3n + p + 9 = 0 \\ 2m + 2n + p + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -3 \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - x - 3y = 0$$