

Examen de Matemáticas

1º Bachillerato (Febrero 2003)

1. Hallar todos los vectores perpendiculares a $\vec{u} = (1, -3)$ que tengan módulo 12.

Solución:

Dos vectores perpendiculares a $\vec{u} = (1, -3)$ serán:

$$\vec{v}_1 = (3, 1) \text{ y } \vec{v}_2 = (-3, -1)$$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ el vector } \vec{h}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \text{ tiene módulo uno,}$$

$$\text{luego } \vec{w}_1 = 12 \cdot \vec{h}_1 = \left(\frac{36}{\sqrt{10}}, \frac{12}{\sqrt{10}} \right) \text{ tiene módulo 12.}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ el vector } \vec{h}_2 = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right) \text{ tiene módulo uno,}$$

$$\text{luego } \vec{w}_2 = 12 \cdot \vec{h}_2 = \left(\frac{-36}{\sqrt{10}}, \frac{-12}{\sqrt{10}} \right) \text{ tiene módulo 12.}$$

2. Calcular la distancia del punto P(2,3) a la recta:

a. $r : 4y = 2x - 3$

b. $r : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$

c. $r : 2x - 7y + 1 = 0$

Solución:

a. La ecuación general de la recta es $2x - 4y - 3 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{4 + 16}} = \frac{|-11|}{\sqrt{20}} = \frac{11}{\sqrt{20}}$$

b.

$$r : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow 3x + y - 11 = 0 \text{ es la ecuación general de la recta.}$$

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 11|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

c. La ecuación general es $2x - 7y + 1 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 2 - 7 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{4 + 49}} = \frac{|-16|}{\sqrt{53}} = \frac{16}{\sqrt{53}}$$

3. Calcular el ángulo formado por las rectas:

a.

$$\begin{aligned} r : x - y + 3 &= 0 \\ s : 2x + 3y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

b.

$$r : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2}$$

Solución:

a. Las rectas están definidas según su ecuación general

$$\begin{aligned} r : x - y + 3 &= 0 \\ s : 2x + 3y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 3}{\sqrt{1+1} \sqrt{4+9}} = -0,1961161351 \Rightarrow \\ \alpha &= 101^\circ 18' 36'' \end{aligned}$$

b. Pasamos las rectas a su ecuación general:

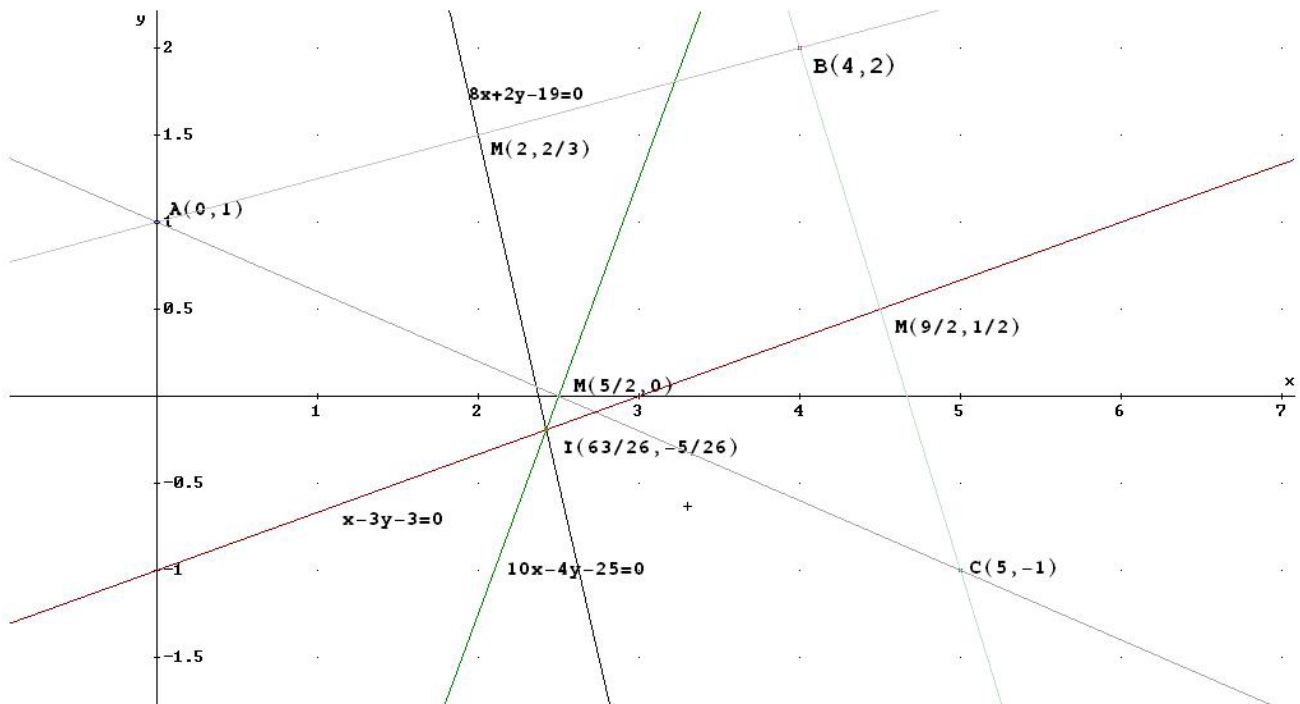
$$r : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow x + 3y - 5 = 0$$

$$s : \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} \Rightarrow 2x + y - 8 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{\sqrt{1+9} \sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

4. Dado el triángulo formado por los puntos $A(0,1)$, $B(4,2)$ y $C(5,-1)$, calcular las ecuaciones de sus mediatrices y el punto en el que se cortan (circuncentro).

Solución:



Calculamos M_1 , M_2 y M_3 :

$$M_1 = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \left(2, \frac{3}{2} \right)$$

$$M_2 = \left(\frac{4+5}{2}, \frac{2-1}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$M_3 = \left(\frac{0+5}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 0 \right)$$

Calculamos los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{AC}

$$\overrightarrow{AB} = (4,2) - (0,1) = (4,1) \Rightarrow (-1,4) \text{ es un vector perpendicular a } \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BC} = (5,-1) - (4,2) = (1,-3) \Rightarrow (3,1) \text{ es un vector perpendicular a } \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AC} = (5,-1) - (0,1) = (5,-2) \Rightarrow (2,5) \text{ es un vector perpendicular a } \overrightarrow{AC}$$

Las mediatrices pasarán por los puntos medios, y tendrán por vectores directores los perpendiculares a los lados:

$$r_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{4} \Rightarrow 8x+2y-19=0$$

$$r_2 : \frac{x-\frac{9}{2}}{3} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow x-3y-3=0$$

$$r_3 : \frac{x-\frac{5}{2}}{2} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow 10x-4y-25=0$$

Las coordenadas del circuncentro serán la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 8x+2y-19=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{63}{26} \\ y=-\frac{5}{26} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{63}{26}, -\frac{5}{26}\right)$$