Examen de Matemáticas

1º Bachillerato (Febrero 2003)

1. **Hallar todos los vectores perpendiculares a $\vec{u}=(3,-5)$ que tengan módulo 16.**

   Solución:

   Dos vectores perpendiculares a $\vec{u}=(3,-5)$ serán:

   $$\overrightarrow{v_1}=(5,3) \text{ y } \overrightarrow{v_2}=(-5,-3)$$

   $\left|\overrightarrow{v_1}\right|=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$ **el vector** $\overrightarrow{h_1}=\dfrac{\overrightarrow{v_1}}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|}=\left(\dfrac{5}{\sqrt{34}},\dfrac{3}{\sqrt{34}}\right)$ **tiene módulo uno, luego** $\overrightarrow{w_1}=16\cdot\overrightarrow{h_1}=\left(\dfrac{80}{\sqrt{34}},\dfrac{48}{\sqrt{34}}\right)$ **tiene módulo 16.**

   $\left|\overrightarrow{v_2}\right|=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$ **el vector** $\overrightarrow{h_2}=\dfrac{\overrightarrow{v_2}}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|}=\left(\dfrac{-5}{\sqrt{34}},\dfrac{-3}{\sqrt{34}}\right)$ **tiene módulo uno, luego** $\overrightarrow{w_2}=16\cdot\overrightarrow{h_2}=\left(\dfrac{-80}{\sqrt{34}},\dfrac{-48}{\sqrt{34}}\right)$ **tiene módulo 16.**

2. **Calcular la distancia del punto P(3,2) a la recta:**

   a. $r: 3y=2x-5$

   b. $r:\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \end{cases}$

   c. $r: 2x-5y+1=0$

   Solución:

   a. La ecuación general de la recta es $2x-3y-5=0$

   $$d(P,r)=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot 3-3\cdot 2-5|}{\sqrt{4+9}}=\frac{|-5|}{\sqrt{13}}=\frac{5}{\sqrt{13}}$$

b.

$$r:\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 3 = 0 \text{ es la ecuación general de la recta.}$$

$$d(P,r) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

c. La ecuación general es $2x - 5y + 1 = 0$

$$d(P,r) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{4+25}} = \frac{|-3|}{\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

3. Calcular el ángulo formado por las rectas:

a.

$$r: \quad 3x - y - 1 = 0$$
$$s: \quad x + 2y + 3 = 0$$

b.

$$r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{5}$$

Solución:

a. Las rectas están definidas según su ecuación general

$$r: \quad 3x - y - 1 = 0$$
$$s: \quad x + 2y + 3 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{\sqrt{9+1}\sqrt{1+4}} = 0{,}1414 \Rightarrow \alpha = 81^\circ 52' 12''$$

b. Pasamos las rectas a su ecuación general:

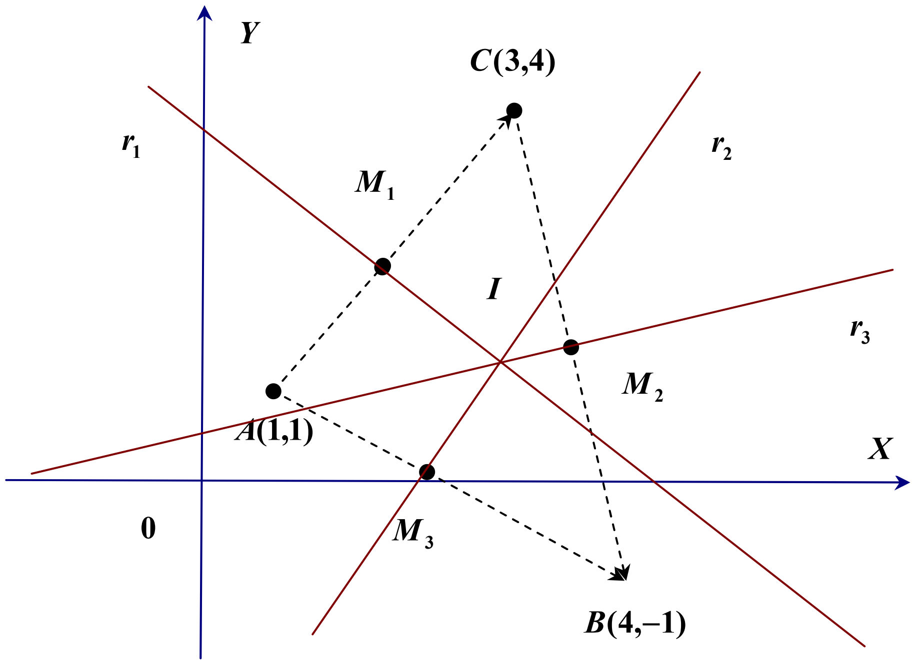
$$r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x + y + 1 = 0$$

$$s: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{5} \Rightarrow 5x + 2y - 3 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{3 \cdot 5 + 1 \cdot 2}{\sqrt{9+1}\sqrt{25+4}} = 0{,}9982 \Rightarrow \alpha = 3^\circ 21' 59''$$

4. **Dado el triángulo formado por los puntos $A(1,1)$, $B(4,-1)$ y $C(3,4)$, calcular las ecuaciones de sus mediatrices y el punto en el que se cortan (circuncentro).**

   Solución:



Calculamos M_1, M_2 y M_3:

$$M_1=\left(\frac{1+3}{2},\frac{1+4}{2}\right)=\left(2,\frac{5}{2}\right)$$

$$M_2=\left(\frac{3+4}{2},\frac{4-1}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$M_3=\left(\frac{1+4}{2},\frac{1-1}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},0\right)$$

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}=(3,4)-(1,1)=(2,3) \Rightarrow (-3,2)$ **es un vector perpendicular a** $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CB}=(4,-1)-(3,4)=(1,-5)\Rightarrow (5,1)$ **es un vector perpendicular a** $\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB}=(4,-1)-(1,1)=(3,-2)\Rightarrow (2,3)$ **es un vector perpendicular a** $\overrightarrow{AB}$

Las mediatrices pasarán por los puntos medios, y tendrán por vectores directores los perpendiculares a los lados:

$$r_1 : \frac{x-2}{-3} = \frac{y-\frac{5}{2}}{2} \Rightarrow 4x+6y-23=0$$

$$r_2 : \frac{x-\frac{7}{2}}{5} = \frac{y-\frac{3}{2}}{1} \Rightarrow x-5y+4=0$$

$$r_3 : \frac{x-\frac{5}{2}}{2} = \frac{y-0}{3} \Rightarrow 6x-4y-15=0$$

Las coordenadas del circuncentro serán la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-5y+4=0 \\ 6x-4y-15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7/2 \\ y = 3/2 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$$