# Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

**Abril 2003**

1. (a) Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x-4)\sqrt{x+2}}{x+3}$$

**Solución:**
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+2 \geq 0 \implies x \geq -2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3=0 \implies x=-3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+2=0 \implies x=-2$, luego eliminando el valor $x=-3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2,+\infty)$

(b) Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
**Solución:**
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 2 = x - 2$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-2)) = \sqrt{x^2-2}$

(c) Sea $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ en el dominio $D = (-1/2, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
**Solución:**
$f(x) = \frac{x}{2x+1} \implies (2x+1)f(x) = x \implies 2xf(x) + f(x) = x \implies 2xf(x) - x = -f(x) \implies x(2f(x)-1) = -f(x) \implies x = \frac{-f(x)}{2f(x)-1}$ En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-2x}$$

2. Halla los valores de $a$ y de $b$ para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x^3-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

**Solución:**

- En $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{array}\right. \implies b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, $f$ es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo $R$.

3. Calcular:

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x + 2}$$

**Solución:**

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x + 2} = \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{9 - (x^2 + 5)}{(x + 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{4 - x^2}{(x + 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} = \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x + 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{2 - x}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} = \frac{2}{3}$$

4. Calcular:

(a)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$$

**Solución:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2} = [3^\infty] = \infty$$

(b)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 - 1} \right)^{2x}$$

**Solución:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 - 1} \right)^{2x} = \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^\infty \right] = 0$$

(c)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)^{2x^3}$$

**Solución:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)^{2x^3} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-4}$$

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow \infty} 2x^3 \left( \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} - 1 \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-4x^3}{x^3 + 1} = -4$$

(d)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{6x} \right)^{8x}$$

**Solución:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{6x} \right)^{8x} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{\frac{4}{3}}$$

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow \infty} 8x \left( 1 + \frac{1}{6x} - 1 \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{8x}{6x} = \frac{4}{3}$$