Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Abril 2003

Problema 1 *(3 puntos)*

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-4}{(x+3)\sqrt{x+2}}$$

   Solución:
   Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x + 2 \geq 0 \implies x \geq -2$.
   Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3 = 0 \implies x = -3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x + 2 = 0 \implies x = -2$, luego eliminando el valor $x = -3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2, +\infty)$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = |x|$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
   Solución:
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^2 - 2 = x^2 - 2$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2)) = |x^2 - 2|$

3. Sea $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ en el dominio $D = (-1, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
   Solución:
   $f(x) = \frac{2x}{x+1} \implies (x+1)f(x) = 2x \implies xf(x) + f(x) = 2x \implies xf(x) - 2x = -f(x) \implies x(f(x) - 2) = -f(x) \implies x = \frac{-f(x)}{f(x)-2}$
   En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}$$

Problema 2 *(4 puntos)*

1. Calcular

$$\lim_{x \longrightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2-9} - 4}{x-5}$$

   Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2-9} - 4}{x-5} = \lim_{x \longrightarrow 5} \frac{(\sqrt{x^2-9} - 4)(\sqrt{x^2-9} + 4)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9} + 4)} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5} \frac{(\sqrt{x^2-9})^2 - 4^2}{(x-5)(\sqrt{x^2-9} + 4)} = \lim_{x \longrightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9} + 4)} =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)} = \frac{10}{\sqrt{16}+4} \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5} = \frac{5}{4}$$

2. Encuentra los valores de k para los que la función
$f(x) = \begin{cases} 2x - k^2 & si \quad x < 1 \\ kx^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ es continua en todo R
Solución:
Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2x - k^2) = 2 - k^2$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$2 - k^2 = k \Longrightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \quad k = -2$

3. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} & x < -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} & -2 \leq x \leq 0 \\ 5 & \text{si} & x = 0 \\ x + 3 & \text{si} & x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = 3 \\ \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} (x + 3) = 3 \\ f(0) = 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Problema 3 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x} = [1^\infty] = e^\lambda$$
$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} 7x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{7x}{3x} = \frac{7}{3}$$

Luego:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x} = e^{\frac{7}{3}}$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2} = [1^\infty] = e^\lambda$$
$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}(5x^2)\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{10x^2}{x^2+1} = 10$$
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2} = e^{10}$$

3.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right] = 0$$