Examen de Matemáticas

1º Bachillerato (Marzo 2003)

1. **Dada la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-3x-y=0$, calcular el radio y la recta tangente a esta circunferencia en el punto $P(0,1)$. Expresar la ecuación de ella en forma paramétrica, continua y general.**

Solución:

Calculamos el centro y el radio de la circunferencia

$$\begin{cases} m=-2a=-3 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2} \\ n=-2b=-1 \Rightarrow b=\dfrac{1}{2} \\ p=a^2+b^2-r^2 \Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right) \\ r=\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

El vector que une el centro con el punto de tangencia será :

$$\overrightarrow{CP}=(0,1)-\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}\right) \text{perpendicular a } \overrightarrow{CP} \\ P(0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0-\dfrac{1}{2}t \\ y=1-\dfrac{3}{2}t \end{cases} \text{(ecuación paramétrica)}$$

$$\frac{x-0}{-1/2}=\frac{y-1}{-3/2} \text{ (ecuación continua)}$$

$$3x-y+1=0 \text{ (ecuación general)}$$

2. a) **Si la ecuación reducida de una elipse es** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$**, calcular los vértices, los focos y su excentricidad.**

Solución:

$$\begin{cases} a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \\ b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Los vértices serán:

$A(8,0),\ A'(-8,0),\ B(0,4),\ B'(0,-4),\ F\left(4\sqrt{3},0\right)$ y $F'\left(-4\sqrt{3},0\right)$

La excentricidad será :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = 0.8660254037$$

b) Hallar la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que tiene de vértices ***A*(16,0), *A'*(-16,0) y su excentricidad vale *e*=2.**

Solución:

$$\begin{cases} 2a = 32 \Rightarrow a = 16 \\ e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 2\cdot 16 = 32 \\ c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 768 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{768} = 1$$

1. **Calcular el ángulo formado por las rectas:**

$$r: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{3}$$

$$s: \quad 3x + 2y - 1 = 0$$

Solución:

$$\begin{cases} r: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{3} \\ s: 3x+2y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r: 3x+2y-5=0 \\ s: 3x+2y-1=0 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{|3\cdot 3+2\cdot 2|}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{9+4}} = \frac{13}{13} = 1 \Rightarrow \alpha = 0^{\circ}$$

3. **Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $x-3=0$ y del punto (2,0).**

Solución:

Sea $P(x,y)$ la distancia de este punto a la recta tiene que ser igual a la distancia de este punto al punto $C(2,0)$.

$$\begin{cases} d(P,C) = \sqrt{(x-2)^2+y^2} \\ d(P,r) = \dfrac{|x-3|}{\sqrt{1}} = x-3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = x-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 5-2x$$

4. **Calcular la circunferencia que pasa por los puntos (2,0), (0,1) y (3,3).**

Solución:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\begin{cases} 2m + \phantom{3n+{}} p + 4 = 0 \\ \phantom{3m+{}} n + p + 1 = 0 \\ 3m+3n+p+18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -23/7 \\ n = -25/7 \\ p = 18/7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x^2+7y^2-23x-25y+18=0$$

5. **Calcular las raíces de $\sqrt[4]{256i}$**

Solución:

$$z = 0 + 256i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{0 + 256^2} = 256 \\ \tan\alpha = \dfrac{256}{0} = \infty \Rightarrow \alpha = 90^o \end{cases} \Rightarrow$$

$$z = 256(\cos 90^o + i\sin 90^o) = 256_{90^o}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{256}_{\frac{90^o+2k\pi}{4}} = \begin{cases} 4_{\frac{90}{4}} = 4_{22,5^o} = 4(\cos 22,5^o + i\sin 22,5^o) \\ 4_{\frac{90+360}{4}} = 4_{112,5^o} = 4(\cos 112,5^o + i\sin 112,5^o) \\ 4_{\frac{90+2\cdot 360}{4}} = 4_{202,5} = 4(\cos 202,5^o + i\sin 202,5^o) \\ 4_{\frac{90+3\cdot 360}{4}} = 4_{292,5} = 4(\cos 292,5^o + i\sin 292,5^o) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt[4]{z} = \begin{cases} 3,695518130 + 1,530733729 \cdot i \\ -1.530733729 + 3.695518130 \cdot i \\ -3,695518130 - 1,530733729 \cdot i \\ 1.530733729 - 3.695518130 \cdot i \end{cases}$$