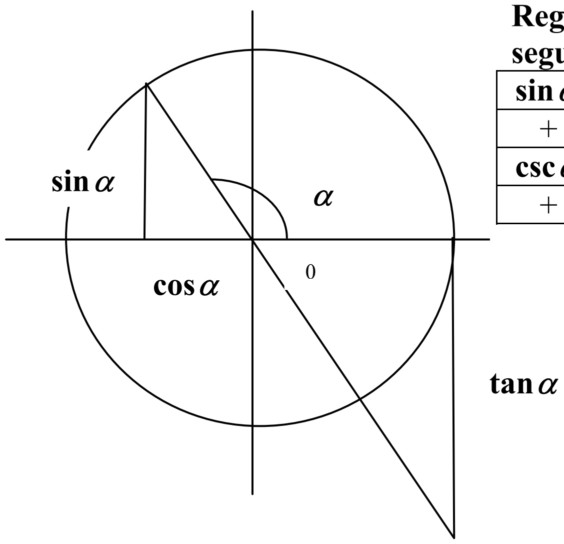
Examen de Matemáticas (1º Bachillerato)
Diciembre 2002

Problema 1º Enunciar y demostrar el teorema del coseno.

Problema 2º Sabemos que $\tan\alpha = -2$ y además que α pertenece al segundo cuadrante. Hallar el resto de las razones trigonométricas.

Solución:



Regla de Signos en el segundo cuadrante:

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
+	—	—
$\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\cot\alpha$
+	—	—

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$. Sustituyendo el valor que nos dan de la tangente tenemos $4 + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{5}$.

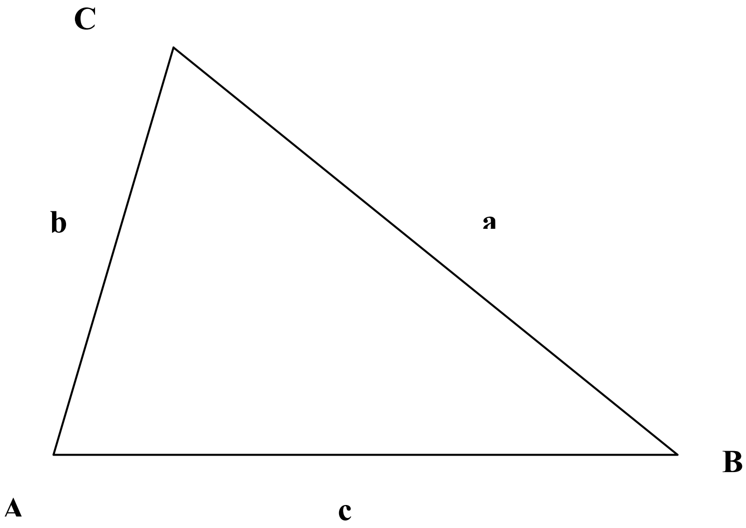
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{2}$$

Problema 3º Resolver el triangulo no rectángulo de lados $\boldsymbol{a = 6}$, $\boldsymbol{b = 8}$ y $\boldsymbol{c = 10}$.



Solución:

Por el teorema del coseno tenemos:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow 36 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos A \Rightarrow}$$
$$\boldsymbol{\cos A = 0{,}8 \Rightarrow A = 36^{o}52'11''}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \Rightarrow 64 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos B \Rightarrow}$$
$$\boldsymbol{\cos B = 0{,}6 \Rightarrow B = 53^{o}7'48''}$$
$$\boldsymbol{A + B + C = 180^{o} \Rightarrow C = 180^{o} - A - C = 90^{o}}$$
$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{256} = 24}$$

donde $\boldsymbol{p = \dfrac{a+b+c}{2}}$

Problema 4º Resolver la ecuación siguiente:

$$\boldsymbol{\cos 2x = 1 + \sin x}$$

Solución:

$$\cos 2x = 1 + \sin x$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 + \sin x$$
$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 + \sin x$$
$$-2\sin^2 x - \sin x = 0$$

Si llamamos $t = \sin x$ tenemos:

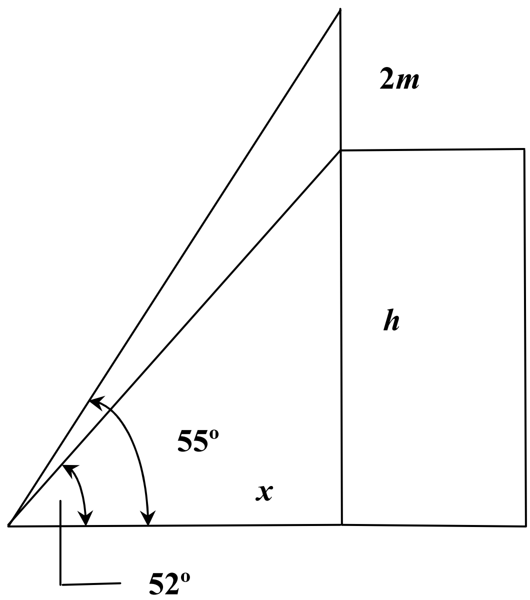
$$2t^2 + t = 0 \Rightarrow t(2t+1) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$Si \quad t = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^o + k \cdot 360^o \\ x = 180^o + k \cdot 360^o \end{cases}$$

$$Si \quad t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210^o + k \cdot 360^o \\ x = 330^o + k \cdot 360^o \end{cases}$$

Problema 5º Una antena de $2m$ se ha colocado en la terraza de un edificio. Desde un punto fijo de la calle vemos el borde de la terraza con un ángulo de 52^o, mientras que elevando un poco la mirada vemos el extremo de la antena bajo un ángulo de 55^o. Calcular la altura del edificio.

Solución:



$$\begin{cases} \tan 55^o = \dfrac{h+2}{x} \\ \tan 52^o = \dfrac{h}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{h+2}{\tan 55^o} \\ x = \dfrac{h}{\tan 52^o} \end{cases} \Rightarrow \frac{h+2}{\tan 55^o} = \frac{h}{\tan 52^o} \Rightarrow \tan 52^o (h+2) = h \cdot \tan 55^o$$

$$\Rightarrow h \cdot \tan 52^o - h \cdot \tan 55^o + 2 \cdot \tan 52^o = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \cdot (\tan 52^o - \tan 55^o) = -2 \cdot \tan 52^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{-2 \cdot \tan 52^o}{\tan 52^o - \tan 55^o} = 17{,}27m.$$