Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2002

Problema 1 *(3 puntos)*

1. Encuentra el dominio de la función
$$f(x) = \frac{x-3}{(x+2)\sqrt{x+1}}$$
Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -1$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$, luego eliminando el valor $x=-1$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-1,+\infty)$

2. Si $f(x) = x^3 - 3$ y $g(x) = |x|$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
Solución:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^3 - 3$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3-3)) = |x^3-3|$

3. Sea $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en el dominio $D = (-1,+\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
Solución:
$f(x) = \frac{x}{x+1} \Longrightarrow (x+1)f(x) = x \Longrightarrow xf(x) + f(x) = x \Longrightarrow xf(x) - x = -f(x) \Longrightarrow x(f(x)-1) = -f(x) \Longrightarrow x = \frac{-f(x)}{f(x)-1}$ En conclusión:
$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

Problema 2 *(2 puntos)*

1. Calcular
$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$$
Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2-7}-3)(\sqrt{x^2-7}+3)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2-7})^2-3^2}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x^2-16}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \frac{8}{\sqrt{9}+3} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \frac{4}{3}$$

2. Encuentra los valores de k para los que la función $f(x) = \begin{cases} 2x-k^2 & si \quad x<1 \\ kx^2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ es continua en todo R

   Solución:
   Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (2x-k^2) = 2-k^2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} kx^2 = k$$

   Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
   $2-k^2 = k \implies k^2+k-2=0 \implies k=1 \quad k=-2$

Problema 3 *(3 puntos)* Hallar, si existen, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones:

1.

$$f(x) = \frac{9x^2+2}{3x+5}$$

   Solución:
   Verticales:

   De existir una asíntota vertical en $x=p$ se deberá de cumplir que $\lim\limits_{x\longrightarrow p} f(x) = \infty$. El punto p que buscaríamos sería tal que anularía el denominador: $3x+5=0 \Longrightarrow x = -\frac{5}{3}$
   Tendremos:

$$\lim_{x\longrightarrow -\frac{5}{3}} \frac{9x^2+2}{3x+5} = \frac{27}{0} = \infty$$

   Luego tenemos una asíntota vertical $x = -\frac{5}{3}$

   Nos podemos preguntar, el porqué hemos resuelto el límite si habíamos escogido un x que anulaba el denominador. La explicación es porque si ese límite hubiera sido finito o no existíese, estaríamos en la situación de que no habría asíntota.

Horizontales:

De existir una asíntota horizontal en $x = c$ se cumpliría que $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = c$
Calculemos este límite:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2}{3x + 5} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9 + \frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x}} = \frac{9}{0} = \infty$$

Podemos concluir con que no hay asíntotas horizontales.
Oblicuas:

Para que la recta $y = ax + b$ sea una asíntota oblicua debe de ser $a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$.
Calculemos estos coeficientes:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2}{3x^2 + 5x} = \frac{9}{3} = 3$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{9x^2 + 2}{3x + 5} - \frac{9}{3}x) = -5$$

Existe una asíntota oblicua, la recta: $y = \frac{9}{3}x - 5$.

2.

$$g(x) = \frac{x^2}{3 + 2x^2}$$

Solución:

Verticales:
Veamos si se anula el denominador:$3 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow 2x^2 = -3 \Longrightarrow x^2 = -\frac{3}{2} \Longrightarrow x = \sqrt{-\frac{3}{2}}$ y como no existen soluciones reales, al ser la raiz cuadrada de un número negativo, no hay asíntotas verticales.

Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{3 + 2x^2} = \frac{1}{2}$$

Luego existe una asíntota horizontal en $y = \frac{1}{2}$.

Oblicuas:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{3x + 2x^3} = 0$$

Luego la función no tiene asíntotas oblicuas.

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}3x\left(1+\frac{1}{5x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}=e^{\frac{3}{5}}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(3x^2)\left(\frac{x^2+2}{x^2}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{6x^2}{x^2}=6$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}=e^6$$