Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2002-Recuperación

Problema 1 *(2 puntos)* Las comisiones representantes de ocho compañías de explotación agrícola se van a reunir en una sala de juntas al rededor de una mesa alargada. Cada una de estas comisiones está compuesta por un presidente un abogado y un asesor comercial. Se pide:

1. De cuantas maneras pueden sentarse estas personas si los miembros de cada comisión tienen que estar juntos.
2. De cuantas maneras pueden sentarse estas personas si además el presidente de cada comsión se tiene que tener a cada uno de sus lados en uno al abogado, y en el otro al asesor.

Solución:

Como las personas están al rededor de una mesa, estamos ante un caso claro de permutaciones circulares. Como tenemos 8 comisiones tendremos por tanto: $CP_n = (n-1)! = CP_8 = (8-1)! = 7! = 5.040$ maneras distintas de sentar las comisiones en la mesa.

1. Una comisión está compuesta por tres personas, que se pueden sentar de $3! = 6$ formas diferentes. Concluimos, por tanto, con que se pueden sentar de $5.040 \cdot 6 = 30.240$ maneras diferentes.
2. Como ahora el presidente de cada comisión tiene que estare en el centro de cada una de ellas, sólo puede variar la posición de las otras dos, es decir, de $2! = 2$. Concluimos, por tanto, con que sepueden sentar de $5.040 \cdot 2 = 10.080$ maneras diferentes.

Problema 2 *(2 puntos)* Desde un punto determinado del mar, el capitán de un barco observa la luz de un faro con una inclinación de 15^o. Su situación es dramática, le queda combustible para recorrer 10 Km y no sabe si llegará a tierra. Después de recorrer 2 Kms en dirección hacia el faro vuelve a comprobar la inclinación de la luz del faro que ahora resulta de 25^o. En estos momentos el capitán ya conoce lo que le interesa, y que yo pido que me calculeis:

1. La altura del faro.
2. La distancia a la que se encuentra del faro.

Solución:

1. Observando la figura nos damos cuenta rápidamente que:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 15^{o} = \frac{h}{x+2} \\ \\ \tan 25^{o} = \frac{h}{x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 0,268 & (x+2) & = h \\ 0,466 & x & = h \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow 0,268(x+2) = 0,466x \Longrightarrow x = 2,71 \;\; h = 1,26$$

2. La distancia que le separa del faro está calculada en el apartado anterior.

Problema 3 *(2 puntos)* Calcula

$$\sqrt[5]{\sqrt{3}+i}$$

Solución:
Primero pasamos el número complejo a polares y después calculamos las raices.

$$z = \sqrt{3+i} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{4} = 2 \\ \\ \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |z| = 2 \\ \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \end{array}\right. \Longrightarrow z = 2_{\frac{\pi}{6}}$$

Es decir, $z = \sqrt{3+i} = 2_{\frac{\pi}{6}} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

Ahora calculamos las raices:

$$\sqrt[5]{2_{\frac{\pi}{6}}} = \left\{\begin{array}{l} \sqrt[5]{2}_{\frac{30^{o}}{5}} = \sqrt[5]{2}_{6^{o}} \\ \sqrt[5]{2}_{\frac{30^{o}+360^{o}}{5}} = \sqrt[5]{2}_{78^{o}} \\ \sqrt[5]{2}_{\frac{30^{o}+2\cdot 360^{o}}{5}} = \sqrt[5]{2}_{150^{o}} \\ \sqrt[5]{2}_{\frac{30^{o}+3\cdot 360^{o}}{5}} = \sqrt[5]{2}_{222^{o}} \\ \sqrt[5]{2}_{\frac{30^{o}+4\cdot 360^{o}}{5}} = \sqrt[5]{2}_{294^{o}} \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \sqrt[5]{2}(\cos 6^{o} + i\sin 6^{o}) \\ \sqrt[5]{2}(\cos 78^{o} + i\sin 78^{o}) \\ \sqrt[5]{2}(\cos 150^{o} + i\sin 150^{o}) \\ \sqrt[5]{2}(\cos 222^{o} + i\sin 222^{o}) \\ \sqrt[5]{2}(\cos 294^{o} + i\sin 294^{o}) \end{array}\right.$$

$$\sqrt[5]{2_{\frac{\pi}{6}}} = \begin{cases} 1,142 + 0,120i \\ 0,239 + 1,124i \\ -0,995 + 0,574i \\ -0,854 - 0,769i \\ 0,467 - 1,049i \end{cases}$$

Problema 4 *(4 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \geq -1 \\ \\ \frac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

1. (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f.
2. (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.
3. (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

1. Calculamos el dominio:
   - Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
   - Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único plosible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.
   - En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

   Calculamos la continuidad:
   La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supueto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

   - En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$

Luego f es continua en $x = -1$.

- En $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

Luego no es continua en $x = 0$.

- En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

2. Asíntotas verticales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:
No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

Asíntotas horizontales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:
Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

- Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{x^2+3x+1}{x} - x) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

  Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- Cuando $x < -1$:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{x} = 0$$

  Luego no hay asíntotas oblicuas en este intervalo.

3. El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$(el eje de abcisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x} dx = \int_1^2 (x + 3 + \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x| \right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2$$