Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2002

Problema 1 *(2 puntos)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1.
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

2.
$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1)$$

3.
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

4.
$$f(x) = e^{\sin x}$$

Solución:

1.
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - 2(x^2 - 1)}{(2x)^2} = \frac{2x^2 + 2}{4x^2} = \frac{x^2 + 1}{2x^2}$$

2.
$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1) \Longrightarrow$$
$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x^2 + 1) + x^2 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = 2x \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

3.
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{1/3} \Longrightarrow$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$$

4.
$$f(x) = e^{\sin x} \Longrightarrow f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Calcular la recta tangente y la recta normal a la función $f(x) = \frac{3x^2}{x+2}$ en $x = 1$.
Solución:
En $x = 1$ tenemos que el valor de la función vale $f(1) = 1 \Longrightarrow (x_0, y_0) = (1, 1)$ será el punto de la curva por el que pasarán las rectas tangente y normal. Para calcular las pendientes de estas rectas calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{6x(x+2) - 3x^2}{(x+2)^2} = \frac{3x(x+4)}{(x+2)^2}$$

Y ahora tendremos que $m = f'(1) = \frac{5}{3}$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $x = 1$, teniendo en cuenta que la ecuación punto pendiente de una recta es $y - y_0 = m(x - x_0)$ tendremos que

$$y - 1 = \frac{5}{3}(x - 1) \Longrightarrow 5x - 3y - 2 = 0$$

es la ecuación de la recta tangente.
Para calcular la ecuación de la recta normal tenemos que su pendiente es $m' = \frac{-1}{m} = -\frac{3}{5}$ por lo que su ecuación la encontraremos de igual manera que la tangente

$$y - 1 = -\frac{3}{5}(x - 1) \Longrightarrow 3x + 5y - 8 = 0$$

es la ecuación de la recta normal.

Problema 3 *(5 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$$

Calcular:

1. Puntos de corte con los ejes.
2. Crecimiento y decrecimiento de la función.
3. Máximos y Mínimos.

Solución:

1. Para calcular los puntos de corte con el eje de ordenadas hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -2$, es decir, el punto de corte sería $(0, -2)$. Para encontrar los puntos de corte con el eje de abcisas hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^3 + 3x^2 + 9x - 2 = 0$ donde obtenemos las soluciones $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$, $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, $x = -2$ En resumen todos los puntos

de corte serían:

$$(0,2),\ (\frac{5-\sqrt{21}}{2},0),\ (\frac{5+\sqrt{21}}{2},0),\ (-2,0)$$

2. Para calcular los intervalos en los que crece y decrece la función buscamos los puntos críticos, es decir, aquellos que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Longrightarrow\ x = 3,\ \ x = -1$$

Es decir:$f'(x) = -3(x-3)(x+1)$ y sabemos que la función crece si $f'(x) > 0$ y decrece si $f'(x) < 0$. Veamos la siguiente tabla:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x+1)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$-3(x-3)(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	*decrece*	*crece*	*crece*	*decrece*

3. Por lo visto en el apartado anterior Hay un máximo en el punto $x = 3 \Longrightarrow (3,25)$, y hay un mínimo en el punto $x = -1 \Longrightarrow (-1,-7)$. Otra forma de comprobarlo es calculando la segunda derivada:
$f''(x) = -6x + 6 \Longrightarrow f''(3) = -18 + 6 = -12 < 0 \Longrightarrow$ Máximo en $x = 3$.
$f''(x) = -6x+6 \Longrightarrow f''(-1) = 6+6 = 12 > 0 \Longrightarrow$ Mínimo en $x = -1$.