Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Febrero 2002

Problema 1 *(2 puntos)* Sabiendo que $\tan\alpha = 2$, calcular el resto de las razones trigonométricas; teniendo en cuenta que α pertenece al tercer cuadrante.

Solución:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Sabemos que $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ y aplicando esta fórmula quedaría:
$2^2 + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec = \pm\sqrt{5} = \pm 2,24$. Como en el tercer cuadrante la secante es negativa concluimos con el resultado $\sec\alpha = -2,24$.

Como $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ podemos despejar $\cos\alpha$ y nos quedaría $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-2.24} = -0,45$, es decir $\cos\alpha = -0,45$.

Ahora vamos a utilizar la fórmula $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$ y tendríamos:
$1 + \frac{1}{4} = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm 1,12$. Como en el tercer cuadrante la cosecante es negativa será $\csc\alpha = -1,12$.

Como $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} = \frac{1}{-1,12} = -0,89$ es decir
$\sin\alpha = -0,89$

Problema 2 *(2 puntos)* Teniendo en cuenta que $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ y que α pertenece al primer cuadrante, calcular:

$$\sin(\alpha + 30^{o});\;\; \sin(\alpha + 45^{o});\;\; \cos(\alpha - 60^{o});\;\; \tan(60^{o} - \alpha)$$

Solución:
Se calcula primero $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$:
$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$; $\quad \tan\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

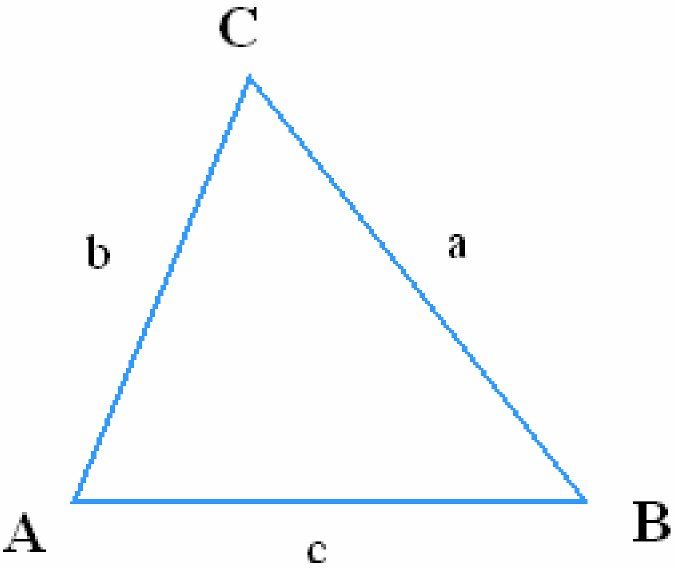
$\sin(\alpha + 30^{o}) = \sin\alpha\cdot\cos 30^{o} + \cos\alpha\cdot\sin 30^{o} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{6} = 0,7601$

$\sin(\alpha + 45^{o}) = \sin\alpha\cdot\cos 45^{o} + \cos\alpha\cdot\sin 45^{o} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,9024$

$\cos(\alpha - 60^{o}) = \cos\alpha\cdot\cos 60^{o} + \sin\alpha\cdot\sin 60^{o} = \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,7601$

$\tan(60^{o} - \alpha) = \frac{\tan 60^{o} - \tan\alpha}{1 + \tan 60^{o}\cdot\tan\alpha} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{8}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}} = 0,8549$

Problema 3 *(2 puntos)* Resolver el triángulo no rectángulo del que conocemos dos de sus ángulos $A = 65^{\circ}$, $C = 35^{\circ}$, y uno de sus lados $b = 15$. Calcular finalmente su área. **Solución:**


C
b
a
A
B
c

Tenemos que $A+B+C=180^o$ luego $B=180^o-(A+B)=180^o-(65^o+35^o)=80^o$
Por el teorema del seno tenemos: $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \implies a=\frac{15\cdot\sin 65^O}{\sin 80^O}=13,8043$

Por el teorema del seno tenemos: $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B} \implies c=\frac{15\cdot\sin 35^O}{\sin 80^O}=8,7364$

Por la fórmula calcularemos la superficie de este triángulo:

El semiperímetro será $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13,8043+15+8,7364}{2}=18,77035$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$

$\sqrt{18,77035\cdot(18,77035-13,8043)\cdot(18,77035-15)\cdot(18,77035-8,7364)}=$

$59,3838.$

Problema 4 *(2 puntos)* Halla todas las raices de la raiz cúbica de 27.
Solución:
Primero escribimos 27 como si fuese un número complejo, es decir, $z=27=27+0\cdot i$, y calculamos su módulo y su argumento:
$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{27^2+0^2}=27, \quad r=27$
$\tan\alpha=\frac{b}{a}=\frac{0}{27}=0 \implies \alpha=0$
Luego el número complejo en forma polar será $z=27_{0^o}$, y a partir de él vamos a calcular sus raices cúbicas:
$\sqrt[3]{27}=(\sqrt[3]{27})_{\frac{0+2n\pi}{3}}=3_{\frac{0+2n\pi}{3}}$, donde $n=0,1,2$
Cuando $n=0 \implies z_1=3_{0^o}=3(\cos 0^o+i\cdot\sin 0^o)=3$
Cuando $n=1 \implies z_2=3_{120^o}=3(\cos 120^o+i\cdot\sin 120^o)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$
Cuando $n=2 \implies z_3=3_{240^o}=3(\cos 240^o+i\cdot\sin 240^o)=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$

Problema 5 *(2 puntos)* Enunciar y demostrar el teorema del coseno.