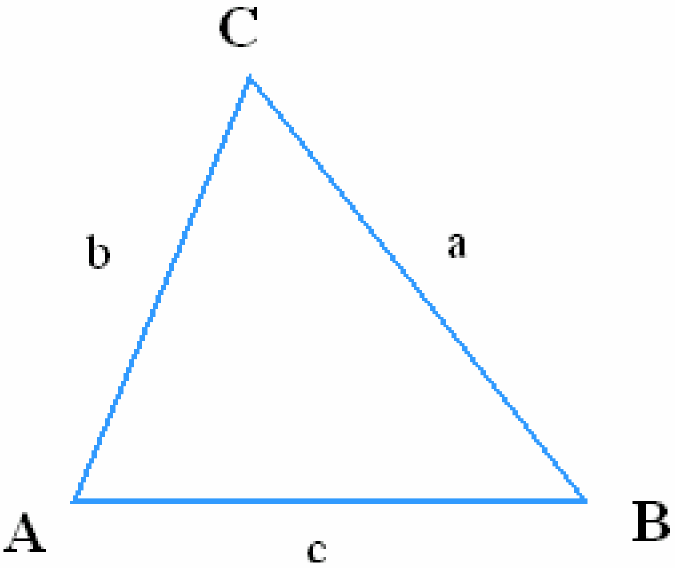
Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Abril 2002

Problema 1 *(2 puntos)* Resolver el triángulo no rectángulo del que conocemos uno de sus ángulos $A = 65^o$, y dos de sus lados $b = 10$, $c = 12$. Calcular finalmente su área.

Solución:


C
b
a
A
c
B

Por el teorema del coseno tenemos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
Es decir: $a^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 65^o = 142,57 \Longrightarrow a = 11,94$
Por el teorema del seno: $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow \frac{10}{\sin B} = \frac{11{,}94}{\sin 65^o} \Longrightarrow \sin B = 0,759 \Longrightarrow B = 49^o 22' 50''$
Como $A + B + C = 180^o \Longrightarrow C = 180^o - (A + B) = 65^o 37' 10''$.

Problema 2 *(2 puntos)* Enunciar los teoremas del seno y del coseno.

Problema 3 *(2 puntos)* Hallar todos los vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u} = (-3, -4)$ que tengan módulo 20.

Solución:

Sea $\overrightarrow{v} = (x, y)$ un vector perpendicular a $\overrightarrow{u} = (-3, -4)$. Lo primero que pensamos es que su producto escalar debe ser cero, es decir, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, como el espacio es ortonormal, nos quedaría que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (-3, -4) \cdot (x, y) = -3x - 4y = 0$
Es trivial comprobar que, en esta ecuación, para cada valor que apliquemos a una de las variables obtendríamos otro valor para la otra. Me voy a limitar a las soluciones enteras.
Una solución posible sería $x = 4$ e $y = -3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (4, -3)$.
Otra solución posible sería $x = -4$ e $y = 3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (-4, 3)$
Claro está, que estos vectores así obtenidos deben ser perpendiculares al vector $\overrightarrow{u}$, lo que nos queda es pasarlos a módulo 20. Para ello voy a seguir dos pasos, primero los pasaré a módulo 1 y luego los pasaré a módulo 20.
Para pasar $\overrightarrow{v}$ a módulo 1 aplicamos la siguiente fórmula: $v' = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$
Obtendríamos los siguientes vectores:

$\overrightarrow{v_1} = (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$
$\overrightarrow{v_2} = (\frac{-4}{5}, \frac{3}{5})$
Para pasarlos a módulo 20 lo único que tendremos que hacer es multiplicar por 20: y nos quedaría:
$\overrightarrow{w_1} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (16, -12)$
$\overrightarrow{w_2} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (-16, 12)$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcula la distancia del punto $P(2,1)$ a la recta r en los siguientes casos:

1. $r:\ y = 2x - 2$
2. $r: \left\{ \begin{array}{lll} x = & 1+ & 2t \\ y = & 2- & t \end{array} \right.$
3. $r:\ 3x + 4y - 5 = 0$

Solución:

1. $y = 2x - 2 \implies 2x - y - 2 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P,r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$= 0,447$

2.

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{x=} & \text{1+} & \text{2t} \\ \text{y=} & \text{2-} & \text{t} \end{array} \right. \implies t = \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \implies -x + 1 = 2y - 4 \implies$$

$x + 2y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P,r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$= 0,447$

3. $3x + 4y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P,r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

Problema 5 *(2 puntos)* Calcula el ángulo formado por las rectas:

1.

$$r_1: \quad 2x - 3y + 1 = 0$$

$$s_1: \quad x + \ \ y - 1 = 0$$

2.

$$r_1: \begin{cases} x = & 2+ & \lambda \\ y = & 2- & 3\lambda \end{cases} \quad r_2: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$$

Solución:

1. Como las rectas están definidas por su ecuación general, ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot u'_1 + u_2 \cdot u'_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}$$

$= \frac{1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = 0,08 \implies \alpha = 85^{\text{o}}24'28''$

2.

$$r_1: \begin{cases} \text{x=} & \text{2+} & \lambda \\ \text{y=} & \text{2-} & 3\lambda \end{cases} \implies \lambda = \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} \implies 3x + y - 8 = 0$$

(Ecuación general de la recta)

$$r_2: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} \implies 2x - 3y - 8 = 0$$

(Ecuación general de la recta)

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot u'_1 + u_2 \cdot u'_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}$$

$= 0,2631 \implies \alpha = 74^{\text{o}}44'42''$